

Réactions de dissociation: aspects théoriques

Maubuisson, septembre 2007

Daniel Baye
Université Libre de Bruxelles

Réactions de dissociation: aspects théoriques (I)

- Introduction
- Modèle
 - Modèle à deux corps du projectile
 - Modèle de réaction à trois corps
- Approximations semi-classiques
 - Sections efficaces
 - Théorie des perturbations au 1^{er} ordre de la dissociation coulombienne
 - Résolution numérique de l'équation de Schrödinger dépendant du temps
- Approximations quantiques
 - Sections efficaces
 - Approximations eikonales
 - Voies couplées avec continu discrétisé (CDCC)
- Conclusion

Introduction

Motivations physiques

- Noyaux exotiques: courte durée de vie, faible énergie de liaison (noyaux à halo)
- Dissociation (dissociation « élastique » ou « diffractive »): principal outil pour extraire les propriétés de noyaux de courte durée de vie
- But: déduire les propriétés du projectile à partir des distributions des fragments émis
- Cause de la dissociation: différentes forces agissent sur les composantes du projectile
- Dissociation coulombienne: mesure des propriétés électromagnétiques d'un noyau, mesure indirecte des sections efficaces de capture radiative pour des réactions d'intérêt astrophysique
- L'analyse des données exige des modèles théoriques

Difficultés d'une description théorique

- Problème à plusieurs corps dans le continu (états initial et final)
- Simplification: système à peu de corps dans le continu (structure de la cible négligée, description simplifiée à 2 ou 3 corps de la structure du projectile)
- Des approximations supplémentaires sont nécessaires pour traiter le mécanisme de la réaction

Modèle

- Trois particules sans structure
cible T, projectile P = coeur c + fragment f
- Exemples de projectile
 $^{11}\text{Be} = ^{10}\text{Be} + n$, $^8\text{B} = ^7\text{Be} + p$, $^7\text{Li} = \alpha + t$
- Trois interactions effectives
 - interaction effective entre le cœur et le fragment (réelle)
 - potentiels optiques cœur-cible et fragment-cible (complexes)
- Autres simplifications (dans cet exposé)
 - spins négligés
 - moment cinétique orbital initial nul

Modèle à deux corps du projectile

Hamiltonien

$$H_0 = \frac{p^2}{2\mu_{cf}} + V_{cf}(r)$$

$$\mu_{cf} = m_c m_f / m_P$$

$$m_P = m_c + m_f$$

Etats liés

$$H_0 \phi_{nlm}(\mathbf{r}) = E_{nl} \phi_{nlm}(\mathbf{r})$$

$$\langle \phi_{nlm} | \phi_{n'l'm'} \rangle = \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

Etats de diffusion

$$H_0 \phi_{klm}(\mathbf{r}) = E \phi_{klm}(\mathbf{r}) \quad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu_{cf}}$$

$$\langle \phi_{klm} | \phi_{k'l'm'} \rangle = \delta(k - k') \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

Relation de fermeture

$$\sum_{nlm} |\phi_{nlm}\rangle \langle \phi_{nlm}| + \sum_{lm} \int_0^\infty |\phi_{klm}\rangle \langle \phi_{klm}| dk = 1$$

Fonctions d'onde radiales $\phi_{klm}(\mathbf{r}) = r^{-1} Y_l^m(\Omega) u_{kl}(r)$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2\mu_{cf} V_{cf}(r)}{\hbar^2} + k^2 \right) u_{kl}(r) = 0$$

$$u_{kl}(0) = 0$$

Normalisation $\int_0^\infty u_{kl}(r) u_{k'l}(r) dr = \delta(k - k')$

$$u_{kl}(r) \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} \sqrt{\frac{2}{\pi}} [\cos \delta_l F_l(\eta, kr) + \sin \delta_l G_l(\eta, kr)]$$

$$\xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(kr - \frac{1}{2}l\pi - \eta \ln 2kr + \sigma_l + \delta_l)$$

Paramètre de Sommerfeld $\eta = Z_c Z_f e^2 / \hbar v$

Déphasages coulombiens $\sigma_l = \arg \Gamma(l + 1 + i\eta)$

Etats stationnaires de diffusion entrants $H_0 \phi_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r}) = E \phi_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r})$

$$\phi_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} (2\pi)^{-3/2} \left(e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \dots} + f(\Omega) \frac{e^{ikr - \dots}}{r} \right)$$

$f(\Omega)$: amplitude de diffusion

Section efficace élastique $\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\Omega)|^2$

Etats stationnaires de diffusion sortants $\phi_{\mathbf{k}}^{(-)}(\mathbf{r}) = \left(\phi_{-\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r}) \right)^*$
(renversés par rapport au temps)

$$\phi_{\mathbf{k}}^{(-)}(\mathbf{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} (2\pi)^{-3/2} \left(e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \dots} + f^*(\Omega) \frac{e^{-ikr - \dots}}{r} \right)$$

$$\langle \phi_{\mathbf{k}}^{(\pm)} | \phi_{\mathbf{k}'}^{(\pm)} \rangle = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

$$\sum_{nlm} |\phi_{nlm}\rangle \langle \phi_{nlm}| + \int |\phi_{\mathbf{k}}^{(\pm)}\rangle \langle \phi_{\mathbf{k}}^{(\pm)}| d\mathbf{k} = 1$$

Développement en ondes partielles

$$\phi_{\mathbf{k}}^{(\pm)}(\mathbf{r}) = k^{-1} \sum_{lm} i^l Y_l^{m*}(\Omega_{\mathbf{k}}) e^{\pm i(\sigma_l + \delta_l)} \phi_{klm}(\mathbf{r})$$

Ondes partielles entrantes et sortantes

$$\begin{aligned} \phi_{klm}^{(\pm)}(\mathbf{r}) &= k \int Y_l^m(\Omega_{\mathbf{k}}) \phi_{\mathbf{k}}^{(\pm)}(\mathbf{r}) \\ &= i^l e^{\pm i(\sigma_l + \delta_l)} \phi_{klm}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

Fonctions radiales entrantes et sortantes

$$u_{kl}^{(\pm)}(r) = i^l e^{\pm i(\sigma_l + \delta_l)} u_{kl}(r)$$

(ne diffèrent que par une phase)

Modèle à trois corps

Cible T m_T, Z_T

Coeur c du projectile m_c, Z_c

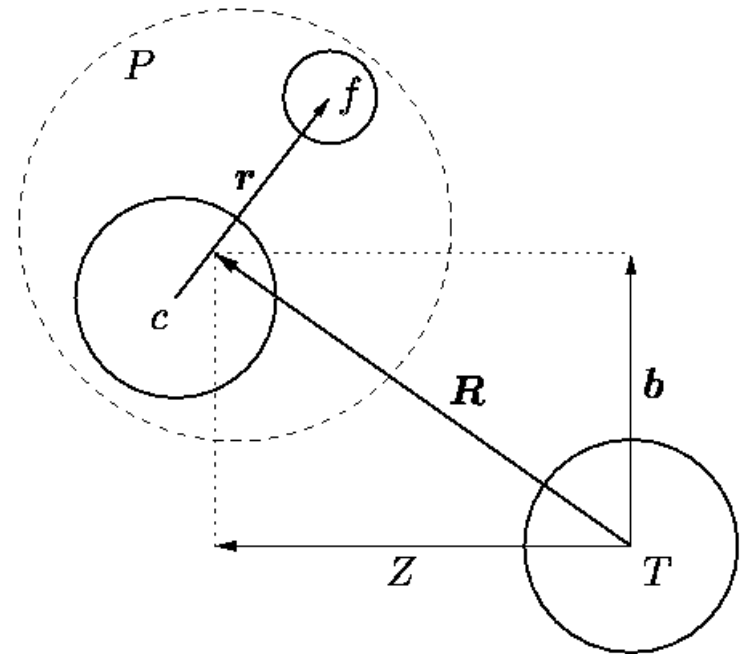
Fragment f du projectile m_f, Z_f

Hamiltonien
$$H = \frac{p_f^2}{2m_f} + \frac{p_c^2}{2m_c} + \frac{p_T^2}{2m_T} + V_{cf} + V_{fT} + V_{cT}$$

V_{cf} : potentiel **réel** coeur-fragment
(peut dépendre du moment cinétique)

V_{fT} : potentiel **optique** fragment-cible

V_{cT} : potentiel **optique** cœur-cible



Coordonnées de Jacobi et impulsions

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_f - \mathbf{r}_c & \mathbf{p} &= \frac{m_c \mathbf{p}_f - m_f \mathbf{p}_c}{m_P} \\ \mathbf{R} &= \frac{m_f \mathbf{r}_f + m_c \mathbf{r}_c}{m_P} - \mathbf{r}_T & \mathbf{P} &= \frac{m_T (\mathbf{p}_f + \mathbf{p}_c) - m_P \mathbf{p}_T}{m_P + m_T} \end{aligned}$$

Moment cinétique (interne) total

$$\mathbf{J} = \mathbf{l} + \mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} + \mathbf{R} \times \mathbf{P}$$

Séparation du mouvement du centre de masse

$$\left(\frac{P^2}{2\mu_{PT}} + H_0 + V_{PT}(\mathbf{R}, \mathbf{r}) \right) \Psi(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = E_{\text{tot}} \Psi(\mathbf{R}, \mathbf{r})$$

$$V_{PT}(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = V_{cT} \left(\mathbf{R} - \frac{m_f}{m_P} \mathbf{r} \right) + V_{fT} \left(\mathbf{R} + \frac{m_c}{m_P} \mathbf{r} \right)$$

Approximations semi-classiques

- Description **quantique** du mouvement interne du projectile
- Description **classique** du mouvement relatif projectile-cible
- Trajectoire classique: paramètre d'impact b , vitesse initiale v
- Approximation supplémentaire: petits angles, trajectoires rectilignes
(trajectoires coulombiennes)

Equation de Schrödinger dépendant du temps

Trajectoire $\mathbf{R}(t)$ (vitesse initiale v , paramètre d'impact b)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = [H_0(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r}, t)] \Psi(\mathbf{r}, t)$$

$$V(\mathbf{r}, t) = V_{PT}(\mathbf{R}(t), \mathbf{r}) - \frac{(Z_c + Z_f)Z_T e^2}{R(t)}$$

Opérateur d'évolution

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = U(t, t_0) \Psi(\mathbf{r}, t_0)$$

(U unitaire si V réel)

Etat initial $\Psi(\mathbf{r}, t) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} e^{-iE_0 t/\hbar} \phi_0(\mathbf{r})$

Sections efficaces

Hypothèse simplificatrice: un seul état lié (noyau à halo)

Elastique $P_0 = |\langle \phi_0 | \Psi(+\infty) \rangle|^2$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma_R}{d\Omega} P_0(b) \quad (b = a \cot \frac{1}{2}\theta)$$

Dissociation $\frac{dP}{d\mathbf{k}} = \left| \langle \phi_{\mathbf{k}}^{(-)} | \Psi(+\infty) \rangle \right|^2$

$$\frac{d\sigma}{d\mathbf{k}} = 2\pi \int_0^\infty b db \frac{dP}{d\mathbf{k}}$$

Probabilité totale

$$P_0 + \int \frac{dP}{d\mathbf{k}} d\mathbf{k} = \langle \Psi(+\infty) | \Psi(+\infty) \rangle$$

Développement en ondes partielles

Distribution d'impulsions

$$\frac{dP}{d\mathbf{k}} = k^{-2} \left| \sum_{lm} (-i)^l Y_l^m(\Omega_k) e^{i(\sigma_l + \delta_l)} \langle \phi_{klm} | \Psi(+\infty) \rangle \right|^2$$

$$\frac{dP}{dk} = k^2 \int d\Omega_k \frac{dP}{d\mathbf{k}} = \sum_{lm} |\langle \phi_{klm} | \Psi(+\infty) \rangle|^2$$

Distribution d'énergies

$$\frac{dP}{dE} = \left(\frac{dE}{dk} \right)^{-1} \frac{dP}{dk} = \frac{1}{\hbar v_{cf}} \sum_{lm} |\langle \phi_{klm} | \Psi(+\infty) \rangle|^2$$

$$\frac{d\sigma}{dE} = 2\pi \int_0^\infty b db \frac{dP}{dE}$$

Théorie des perturbations au 1^{er} ordre

ESDT

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = [H_0 + V(t)] |\Psi(t)\rangle$$

Approximation

$$|\Psi(t)\rangle \rightarrow |\Psi(-\infty)\rangle = e^{-iH_0 t/\hbar} |\phi_0\rangle$$

$$e^{iEt/\hbar} \langle \phi_{klm} | \Psi(+\infty) \rangle = \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \langle \phi_{klm} | V(t) | \phi_0 \rangle dt$$

$$\omega = (E - E_0)/\hbar$$

Distribution de probabilités en fonction de l'énergie

$$\frac{dP}{dE} = \frac{1}{\hbar v_{cf}} \sum_{lm} |\langle \phi_{klm} | \Psi(+\infty) \rangle|^2$$

Dissociation coulombienne au 1er ordre

$$V^C(\mathbf{r}, t) = \frac{Z_c Z_T e^2}{|\mathbf{R}(t) - \frac{m_f}{m_P} \mathbf{r}|} + \frac{Z_f Z_T e^2}{|\mathbf{R}(t) + \frac{m_c}{m_P} \mathbf{r}|} - \frac{(Z_c + Z_f) Z_T e^2}{R(t)}$$

$$\frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{r_{<}^{\lambda}}{r_{>}^{\lambda+1}} \frac{4\pi}{2\lambda+1} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} Y_{\lambda}^{\mu*}(\Omega') Y_{\lambda}^{\mu}(\Omega)$$

$$r_{>} = \max(r, r'), \quad r_{<} = \min(r, r')$$

Approximation du **champ lointain** $r_{>} = R, \quad r_{<} = r$

$$V^C(\mathbf{r}, t) \approx Z_T e \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{4\pi}{2\lambda+1} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \frac{Y_{\lambda}^{\mu*}(\Omega_R)}{R^{\lambda+1}} \mathcal{M}_{\mu}^{(E\lambda)}$$

Opérateur multipolaire électrique $\mathcal{M}_{\mu}^{(E\lambda)} = Z_{\text{eff}}^{(E\lambda)} e r^{\lambda} Y_{\lambda}^{\mu}(\Omega)$

Charge effective $Z_{\text{eff}}^{(E\lambda)} = Z_c \left(\frac{m_f}{m_P} \right)^{\lambda} + Z_f \left(-\frac{m_c}{m_P} \right)^{\lambda}$

Rôle des charges effectives

$$Z_{\text{eff}}^{(E\lambda)} = Z_c \left(\frac{m_f}{m_P} \right)^\lambda + Z_f \left(-\frac{m_c}{m_P} \right)^\lambda$$

$f = \text{neutron}$ ($Z_f = 0$)

$${}^{11}\text{Be} = {}^{10}\text{Be} + n \quad \begin{array}{l} \text{E1: } 4/11 \sim 0.36 \\ \text{E2: } 4/121 \sim 0.03 \end{array}$$

- corrections du second ordre E1-E1 dominantes

$f = \text{proton}$ ($Z_f = 1$)

$${}^8\text{B} = {}^7\text{Be} + p \quad \begin{array}{l} \text{E1: } -3/8 \sim -0.38 \\ \text{E2: } 53/64 \sim 0.83 \end{array}$$

- corrections du premier ordre E2 importantes

$$\langle \phi_{klm} | \Psi(+\infty) \rangle \approx \frac{Z_T e}{i\hbar} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{4\pi}{2\lambda+1} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \langle \phi_{klm} | \mathcal{M}_{\mu}^{(E\lambda)} | \phi_0 \rangle I_{\lambda\mu}$$

$$I_{\lambda\mu} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \frac{Y_{\lambda}^{\mu*}[\Omega_R(t)]}{R(t)^{\lambda+1}} dt$$

Trajectoire rectiligne

$$I_{\lambda\mu} = \frac{1}{v} \sqrt{\frac{2\lambda+1}{\pi}} \frac{i^{\lambda+\mu}}{\sqrt{(\lambda+\mu)!(\lambda-\mu)!}} \left(\frac{\omega}{v}\right)^{\lambda} K_{\mu}\left(\frac{\omega b}{v}\right)$$

Force dipolaire ($l_0 = 0$)

$$\frac{dB(E1)}{dE} = \frac{1}{\hbar v_{cf}} \sum_m \left| \langle \phi_{k1m} | \mathcal{M}_m^{(E1)} | \phi_0 \rangle \right|^2$$

Section efficace de dissociation E1 $P \rightarrow c + f$

$$\begin{aligned} \frac{dP(E1)}{dE} &= \frac{1}{\hbar v_{cf}} \sum_m |\langle \phi_{k1m} | \Psi(+\infty) \rangle|^2 \\ &= \frac{16\pi}{9} \left(\frac{Z_T e \omega}{\hbar v^2} \right)^2 [K_0(x)^2 + K_1(x)^2] \frac{dB(E1)}{dE} \\ &\quad x = \omega b/v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma(E1)}{dE} &= 2\pi \int_{b_{\min}}^{\infty} b db \frac{dP(E1)}{dE} \\ &= \frac{32\pi^2}{9} \left(\frac{Z_T e}{\hbar v} \right)^2 x_{\min} K_0(x_{\min}) K_1(x_{\min}) \frac{dB(E1)}{dE} \\ &\quad x_{\min} = \omega b_{\min}/v \end{aligned}$$

Relation avec la section efficace E1 de capture radiative $c(f, \gamma)P$

$$\sigma_{\gamma}^{(E1)}(E) \propto \frac{dB(E1)}{dE}$$

Approximation simple pour un halo à un neutron:
onde plane pour l'état libre

$$\phi_{klm} = k \sqrt{\frac{2}{\pi}} j_l(kr) Y_l^m(\Omega)$$

forme **asymptotique** pour l'état lié

$$\phi_0 = \sqrt{2\kappa_0} r^{-1} e^{-\kappa_0 r} Y_0^0(\Omega) \quad |E_0| = \hbar^2 \kappa_0^2 / 2\mu_{cf}$$

Force dipolaire

$$\frac{dB(E1)}{dE} = \frac{3}{\pi^2} (Z_{\text{eff}}^{(E1)} e)^2 \frac{\hbar^2}{\mu_{cf} E_0^2} f\left(\frac{E}{|E_0|}\right)$$

$$f(x) = \frac{x^{3/2}}{(x+1)^4} \quad \int_0^\infty f(x) dx = \frac{\pi}{16}$$

f maximum à $x = 3/5 \rightarrow$ force dipolaire maximum at $E = 3|E_0|/5$

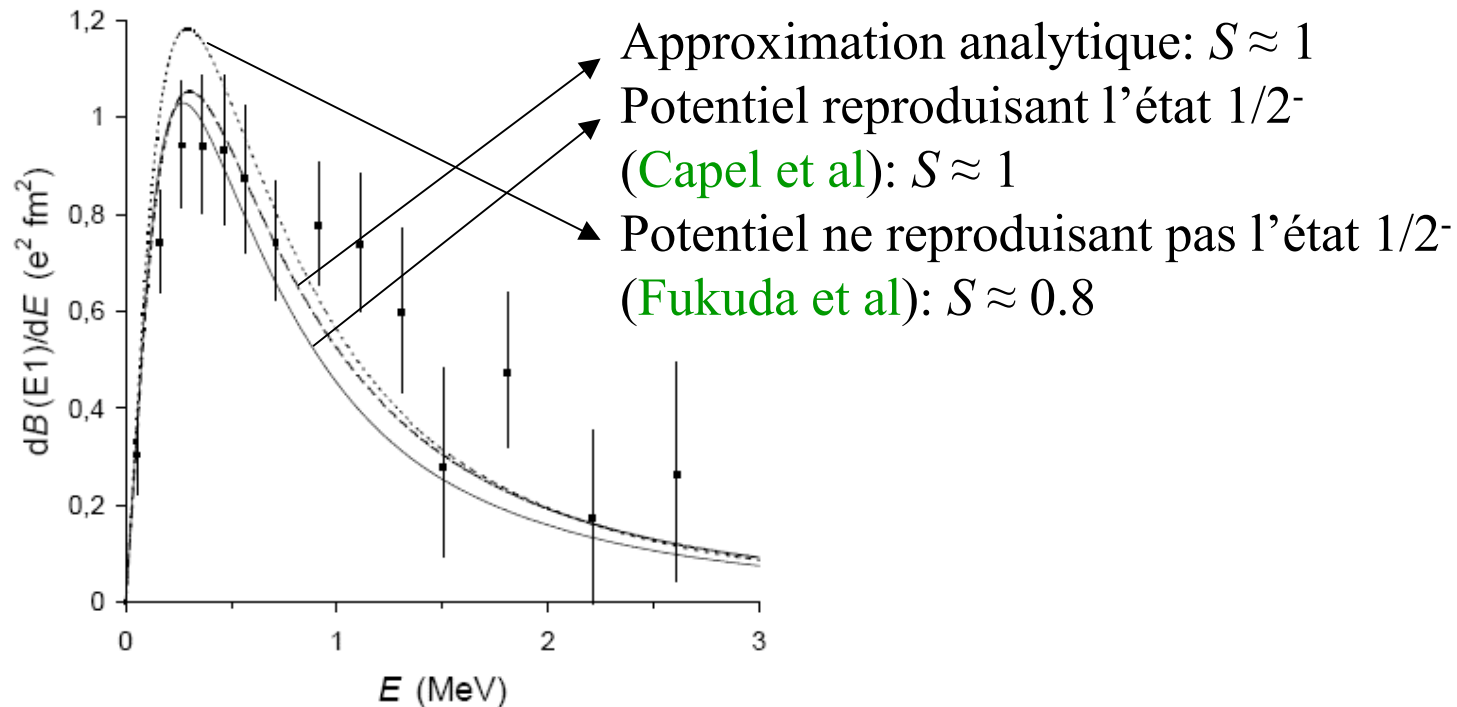
Facteur spectroscopique S and **constante de normalisation asymptotique N**

$$\phi_0 \rightarrow \sqrt{S} \tilde{\phi}_0 \approx \sqrt{S} N r^{-1} e^{-\kappa_0 r} Y_0^0(\Omega)$$

« Détermination » du facteur spectroscopique S



Force dipolaire du ^{11}Be (72 MeV/nucléon)

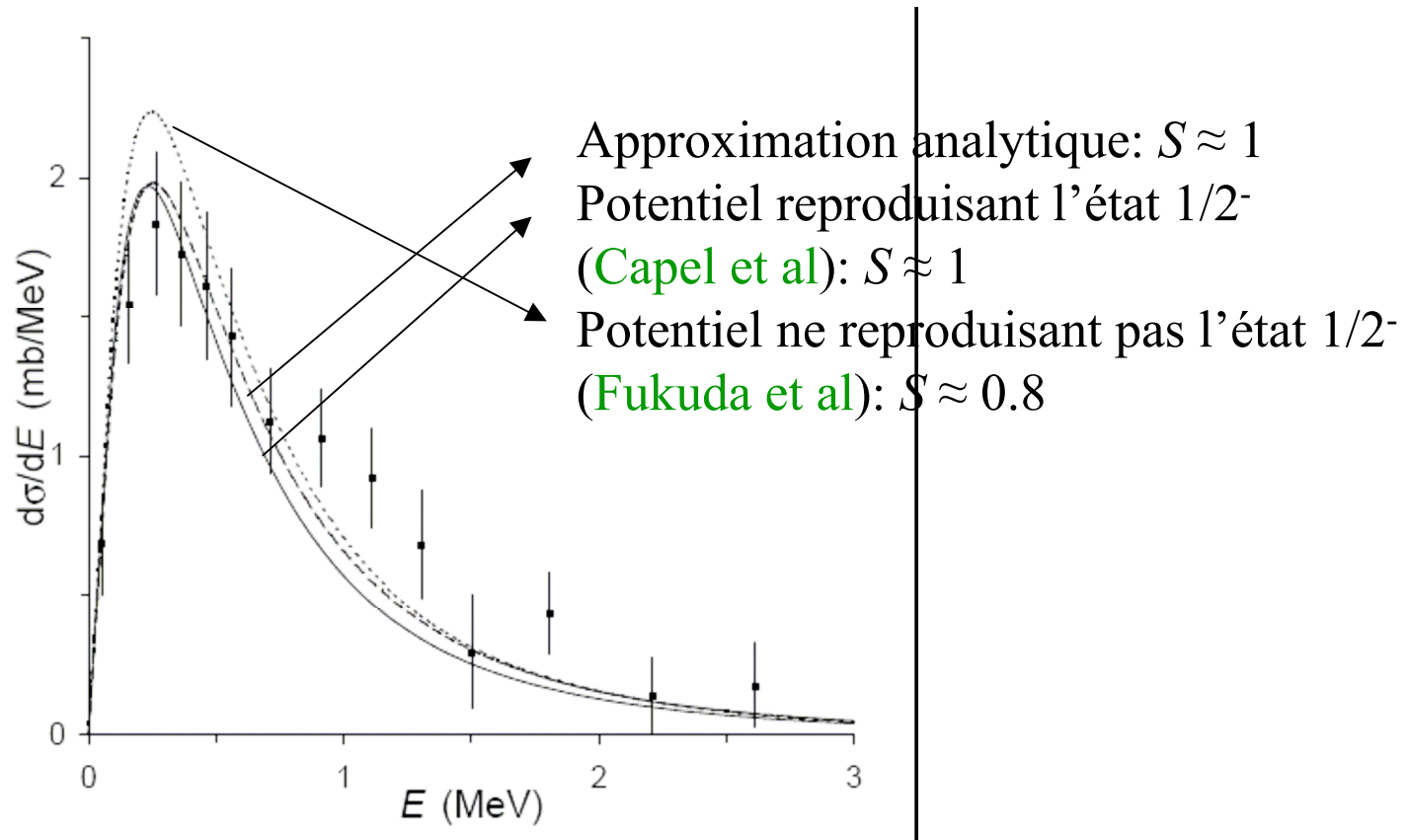


Exp: T. Nakamura et al, Phys. Lett. B 331 (1994) 296

Semi-classique, CDCC: P. Capel, F.M. Nunes, Phys. Rev. C 73 (2006) 014615



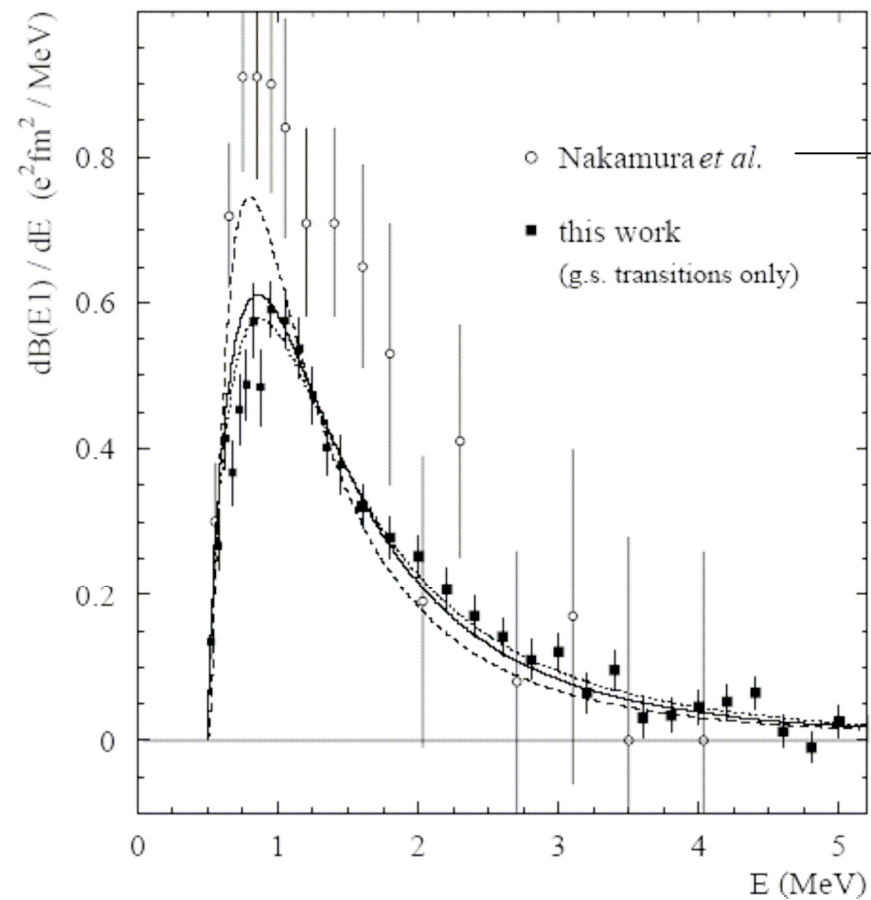
Section efficace de dissociation du ^{11}Be
(72 MeV/nucléon)



Exp: T. Nakamura et al, Phys. Lett. B 331 (1994) 296

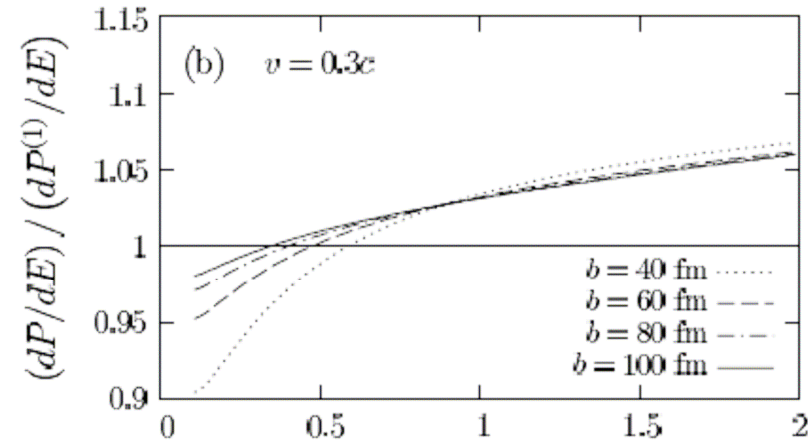
Mais

Comparaison des forces dipolaires de RIKEN et GSI 72 and 520 MeV/nucléon

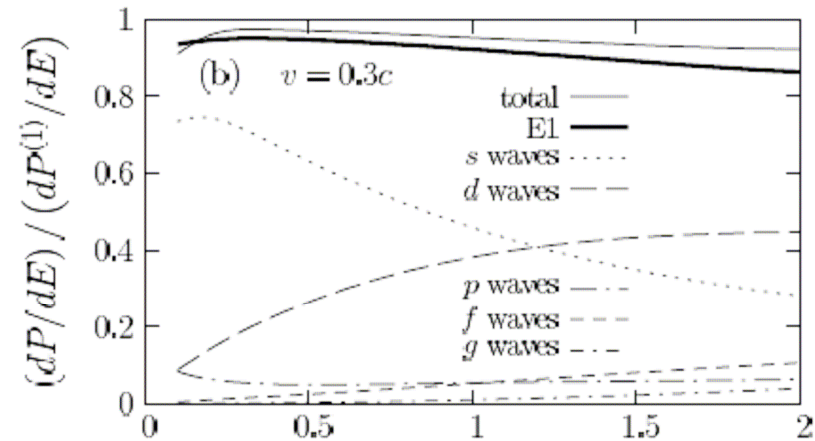


R. Palit et al, Phys. Rev. C 68 (2003) 034318

Rapport des distributions de probabilités obtenues
par résolution numérique et par théorie des perturbations au 1^{er} ordre



P. Capel, D.B., Phys. Rev. C 71 (2005) 044609



Approximation du champ lointain peu précise

Résolution numérique de l'équation de Schrödinger dépendant du temps

Principe

- référentiel du projectile (cible en mouvement)
- représentation de la fonction d'onde du projectile sur un réseau 3D
- état lié initial à $-T$ (T grand)
- évolution de $-T$ to $+T$ par petits pas de temps Δt

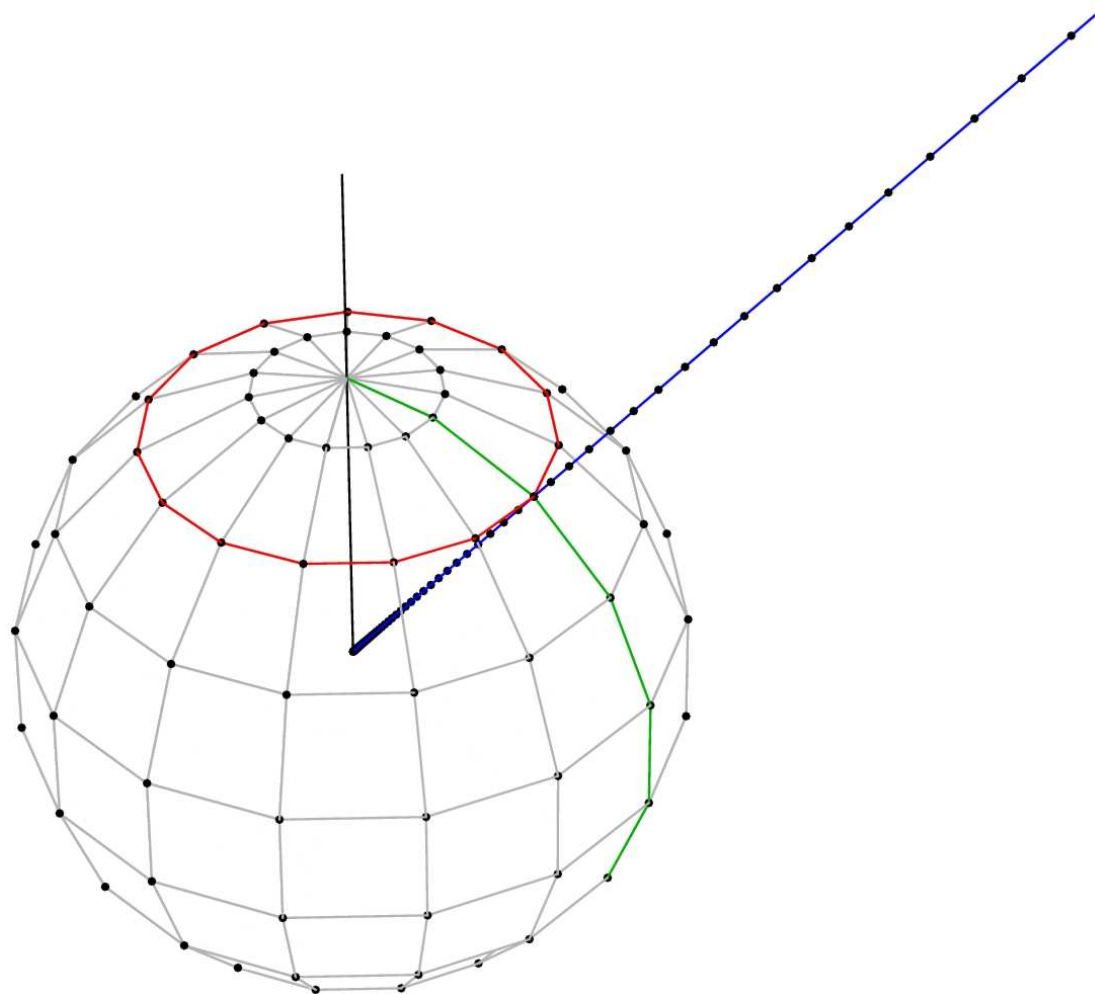
$$\psi(t + \Delta t) = U(t + \Delta t, t)\psi(t)$$

U : opérateur d'évolution approché

- information physique extraite de $\psi(T)$

Exemple de réseau 3D

Mouvement relatif entre le cœur et le fragment



P. Capel, D. B., V.S. Melezhik, Phys. Rev. C 68 (2003) 014612

^{11}Be

Etats liés

$1/2^+$ ($l = 0$) at -0.503 MeV

$1/2^-$ ($l = 1$) at -0.183 MeV

Resonance

$5/2^+$ ($l = 2$) at 1.27 MeV ($\Gamma = 0.10 \pm 0.02$ MeV)

Potentiel $V_0(r)$ pour $^{10}\text{Be} + n$

- Woods-Saxon + spin-orbite (dépendant de l et j)
- Etats liés non physiques $0s_{1/2}$ et $0p_{3/2}$ (principe de Pauli)
- Potentiel avec une résonance physique $0d_{5/2}$

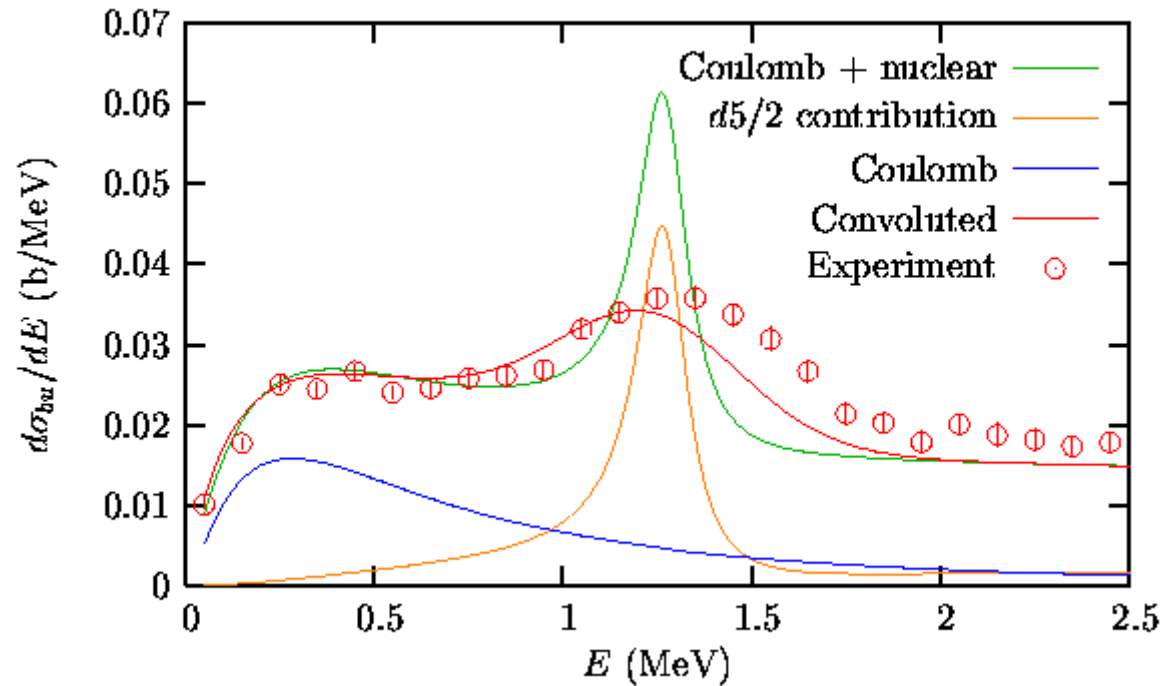
Potentiels optiques pour $^{208}\text{Pb} + n$ et $^{208}\text{Pb} + ^{10}\text{Be}$
pour $^{12}\text{C} + n$ et $^{12}\text{C} + ^{10}\text{Be}$

Pas de paramètre



Calcul semi-classique

67 MeV/nucléon

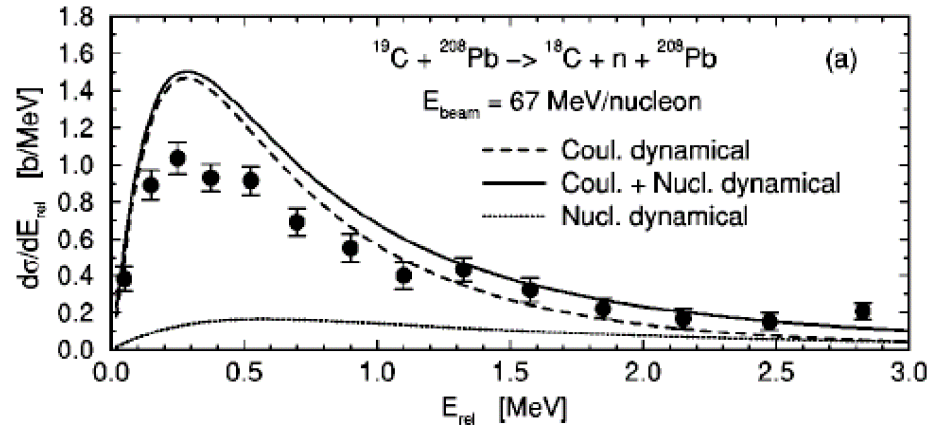


Th: P. Capel et al, Phys. Rev. C 70 (2004) 064605

Exp.: N. Fukuda et al., Phys. Rev. C 70 (2004) 054606

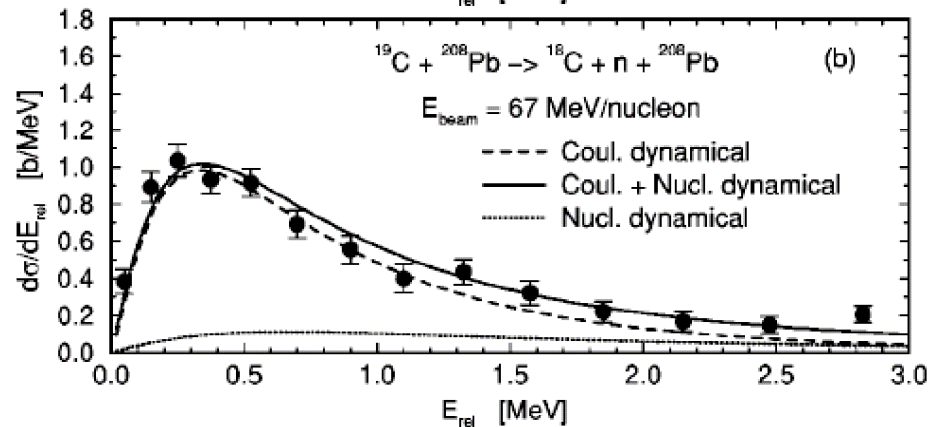
Convolution de la théorie avec la résolution en énergie expérimentale

Influence de l'énergie de séparation du neutron



$$E_0 = 530 \text{ keV}$$

$$(E_{\text{exp}} = 530 \pm 130 \text{ keV})$$



$$E_0 = 650 \text{ keV}$$

S. Typel, R. Shyam, Phys. Rev. C 64 (2001) 024605

Résumé et commentaires

- Théorie des perturbations au 1^{er} ordre
 - l'approximation E1 peut ne pas être assez précise
 - E1 + E2 pour un fragment chargé
 - corrections d'ordre supérieur et/ou relativistes non négligeables
- Résolution numérique de l'ESDT
 - précise mais coûteuse en temps de calcul
 - traitement assez simple sur réseau
- Traitement semi-classique
 - valable seulement pour des sections efficaces intégrées sur les angles (sections efficaces différentielles angulaires peu réalistes)
 - base d'approximations quantiques

Trajectoires coulombiennes classiques

Distance $2a$ d'approche minimum pour des collisions centrales

$$2a = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{E}$$

Equations paramétriques de l'hyperbole

$$R = a(\epsilon \cosh \omega + 1)$$

$$\cos \vartheta = \frac{\sqrt{\epsilon^2 - 1} \sinh \omega}{\epsilon \cosh \omega + 1}$$

$$vt = a(\epsilon \sinh \omega + \omega)$$

Excentricité $\epsilon = \frac{1}{\sin \frac{1}{2}\theta}$

Paramètre d'impact $b = a \cot \frac{1}{2}\theta$

Réactions de dissociation: aspects théoriques

Maubuisson, septembre 2007

Daniel Baye
Université Libre de Bruxelles

Réactions de dissociation: aspects théoriques (II)

- Introduction
- Modèle
 - Modèle à deux corps du projectile
 - Modèle de réaction à trois corps
- Approximations semi-classiques
 - Sections efficaces
 - Théorie des perturbations au 1^{er} ordre de la dissociation coulombienne
 - Résolution numérique de l'équation de Schrödinger dépendant du temps
- Approximations quantiques
 - Sections efficaces
 - Approximations eikonales
 - Voies couplées avec continu discrétisé (CDCC)
- Conclusion

Approximations quantiques

- Sections efficaces
 - Elastique
 - Dissociation
- Approximation eikonale
- Approximation eikonale dynamique
 - Relation avec approximation semi-classique
- Approximation des voies couplées avec continu discrétisé
 - (CDCC: coupled discretized-continuum channels)
 - Deux variantes

Expression générale non relativiste des sections efficaces

$$d^{3N}\sigma = \frac{(2\pi)^4}{\hbar v} |\tilde{T}_{fi}|^2 \delta \left(\sum_{f=1}^N E'_f - E_1 - E_2 - Q \right) \\ \times \delta \left(\sum_{f=1}^N \mathbf{k}'_f - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 \right) \left(\prod_{f=1}^N d\mathbf{k}'_f \right)$$

- Lois de conservation dans les fonctions δ (énergie, impulsion)
- T_{fi} : élément de matrice du potentiel d'interaction entre états final et initial
- Etat initial: fonction d'onde de collision complète (solution « exacte » de l'équation de Schrödinger)
- Etat final: $N - 1$ mouvements relatifs libres

Procédure

- Intégration sur le vecteur d'onde total \mathbf{K}_{tot}
- Intégration sur une énergie dans un certain référentiel
- section efficace $3N - 4$ fois différentielle

Collisions élastiques ($N = 2$)

Vecteurs d'onde finals

$$\mathbf{K}'_{\text{tot}} = \mathbf{k}'_P + \mathbf{k}'_T \quad \mathbf{k}' = \frac{m_T \mathbf{k}'_P - m_P \mathbf{k}'_T}{m_P + m_T}$$

Intégration sur le vecteur d'onde total

$$d^3\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2 \hbar v} |T_{fi}|^2 \delta\left(\frac{\hbar^2 k'^2}{2\mu_{PT}} - E - Q\right) d\mathbf{k}'$$

Elément de matrice de transition $\psi(\mathbf{r}) \xrightarrow{z \rightarrow -\infty} e^{i(kz + \dots)}$

$$T_{fi} = (2\pi)^{-3} \tilde{T}_{fi} = \langle e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} | V_{PT} | \psi(\mathbf{r}) \rangle$$

Section efficace élastique

$$d\mathbf{k}' = k'^2 dk' d\Omega$$

$$\delta[f(x) - f(x_0)] = \frac{1}{|f'(x_0)|} \delta(x - x_0)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\mu_{PT}^2}{\hbar^4} |T_{fi}|^2 = |f(\theta)|^2$$

$$f(\theta) = -\frac{\mu_{PT}}{2\pi \hbar^2} T_{fi}$$

Dissociation ($N = 3$)

Vecteurs d'onde finals

$$\mathbf{K}'_{\text{tot}} = \mathbf{k}'_f + \mathbf{k}'_c + \mathbf{k}'_T \quad \mathbf{K}' = \frac{m_T(\mathbf{k}'_f + \mathbf{k}'_c) - m_P \mathbf{k}'_T}{m_P + m_T}$$

$$\mathbf{k} = \frac{m_c \mathbf{k}'_f - m_f \mathbf{k}'_c}{m_P}$$

Intégration sur le vecteur d'onde total

$$d^6\sigma = \frac{1}{(2\pi)^5 \hbar v} |T_{fi}|^2 \delta \left(\frac{\hbar^2 K'^2}{2\mu_{PT}} + \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu_{cf}} - E - Q \right) d\mathbf{k} d\mathbf{K}'$$

Élément de matrice de transition $\Psi(\mathbf{R}, \mathbf{r}) \xrightarrow{Z \rightarrow -\infty} e^{i(KZ + \dots)} \phi_0(\mathbf{r})$

$$T_{fi} = (2\pi)^{-9/2} \tilde{T}_{fi} = \langle e^{i\mathbf{K}' \cdot \mathbf{R}} \phi_{\mathbf{k}}^{(-)}(\mathbf{r}) | V_{PT} | \Psi(\mathbf{R}, \mathbf{r}) \rangle$$

Section efficace de dissociation
(référentiel du centre de masse)

$$\frac{d\sigma}{d\mathbf{k} d\Omega} = \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{\mu_{PT} K'}{\hbar^3 v} |T_{fi}|^2$$

Approximation eikonale

Diffusion par un potentiel

$$\left(\frac{p^2}{2\mu} + V(\mathbf{r}) \right) \psi = E\psi$$

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{ikz} \hat{\psi}(\mathbf{r})$$

$$\left(\frac{p^2}{2\mu} + vp_z + V(\mathbf{r}) \right) \hat{\psi} = 0$$

$$v = \hbar k / \mu$$

Approximation (haute énergie) $|\Delta \hat{\psi}| \ll k |\nabla \hat{\psi}|$

$$\left(-i\hbar v \frac{\partial}{\partial z} + V(\mathbf{r}) \right) \hat{\psi} = 0$$

Fonction d'onde eikonale

$$\psi(\mathbf{r}) = \exp \left[ikz - \frac{i}{\hbar v} \int_{-\infty}^z V(\mathbf{b}, z') dz' \right]$$

R.J. Glauber, Lectures on Theoretical Physics, vol.1 (Interscience, 1959) p.315

Amplitude de diffusion (exacte si ψ exact)

$$f(\theta) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int \exp(-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}) V(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

Impulsion transférée

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$$

Approximation

$$\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - kz = \mathbf{q} \cdot \mathbf{r} \approx \mathbf{q} \cdot \mathbf{b}$$

$$\mathbf{r} = (\mathbf{b}, z)$$

(petits angles)

$$\begin{aligned} f(\theta) &\approx -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int d\mathbf{b} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{b}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz V(\mathbf{b}, z) \exp\left[-\frac{i}{\hbar v} \int_{-\infty}^z V(\mathbf{b}, z') dz'\right] \\ &= \frac{ik}{2\pi} \int d\mathbf{b} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{b}} [1 - e^{i\chi(\mathbf{b})}] \end{aligned}$$

Fonction de déphasage

$$\chi(\mathbf{b}) = -\frac{1}{\hbar v} \int_{-\infty}^{\infty} V(\mathbf{b}, z) dz$$

Amplitude de diffusion eikonale

$$f(\theta) = ik \int_0^{\infty} b db J_0(qb) [1 - e^{i\chi(\mathbf{b})}]$$

Potentiel coulombien

$$\chi_C(b) = -\frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{b^2 + z^2}} dz$$

Divergence!

Coupure $a \gg b$ $\chi_C(b) \approx 2\eta \ln \frac{b}{2a}$

Amplitude de diffusion coulombienne eikonale

$$f_C^{\text{eik.}}(\theta) = f_C(\theta) e^{-2i\eta \ln 2ka}$$

Amplitude de diffusion coulombienne exacte

$$f_C(\theta) = -\frac{\eta}{2k \sin^2 \frac{1}{2}\theta} e^{2i(\sigma_0 - \eta \ln \sin \frac{1}{2}\theta)}$$

R.J. Glauber, Lectures on Theoretical Physics, vol.1 (Interscience, 1959) p.315

Approximation eikonale pour la dissociation d'un système à 2 corps

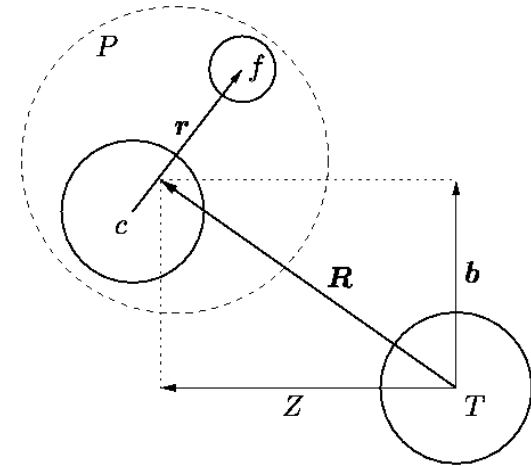
$$\left(\frac{P^2}{2\mu_{PT}} + H_0 + V_{PT}(\mathbf{R}, \mathbf{r}) \right) \Psi(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = E_{\text{tot}} \Psi(\mathbf{R}, \mathbf{r})$$

$$\Psi(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = e^{iKZ} \hat{\Psi}(\mathbf{R}, \mathbf{r})$$

$$E_{\text{tot}} = \frac{\hbar^2 K^2}{2\mu_{PT}} + E_0$$

$$v = \hbar K / \mu_{PT}$$

$$\left(\frac{P^2}{2\mu_{PT}} + vP_Z + H_0 + V_{PT}(\mathbf{R}, \mathbf{r}) - E_0 \right) \hat{\Psi} = 0$$



Approximations eikonale $|\Delta_R \hat{\Psi}| \ll K |\nabla_R \hat{\Psi}|$ et adiabatique $H_0 \approx E_0$

$$\left(-i\hbar v \frac{\partial}{\partial Z} + V_{PT}(\mathbf{R}, \mathbf{r}) \right) \hat{\Psi}_{\text{eik.}} = 0$$

Fonction d'onde eikonale

$$\hat{\Psi}_{\text{eik.}}(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = \exp \left[-\frac{i}{\hbar v} \int_{-\infty}^Z V_{PT}(\mathbf{b}, Z', \mathbf{r}) dZ' \right] \phi_0(\mathbf{r})$$

Diffusion élastique $\mathbf{q} = \mathbf{K}' - \mathbf{K}$

$$S_0^{\text{eik.}}(b) = \lim_{Z \rightarrow +\infty} \langle \phi_0(\mathbf{r}) | \hat{\Psi}_{\text{eik.}}(\mathbf{R}, \mathbf{r}) \rangle - 1$$

$$f(\theta) = iK \int_0^\infty b db J_0(qb) S_0^{\text{eik.}}(b)$$

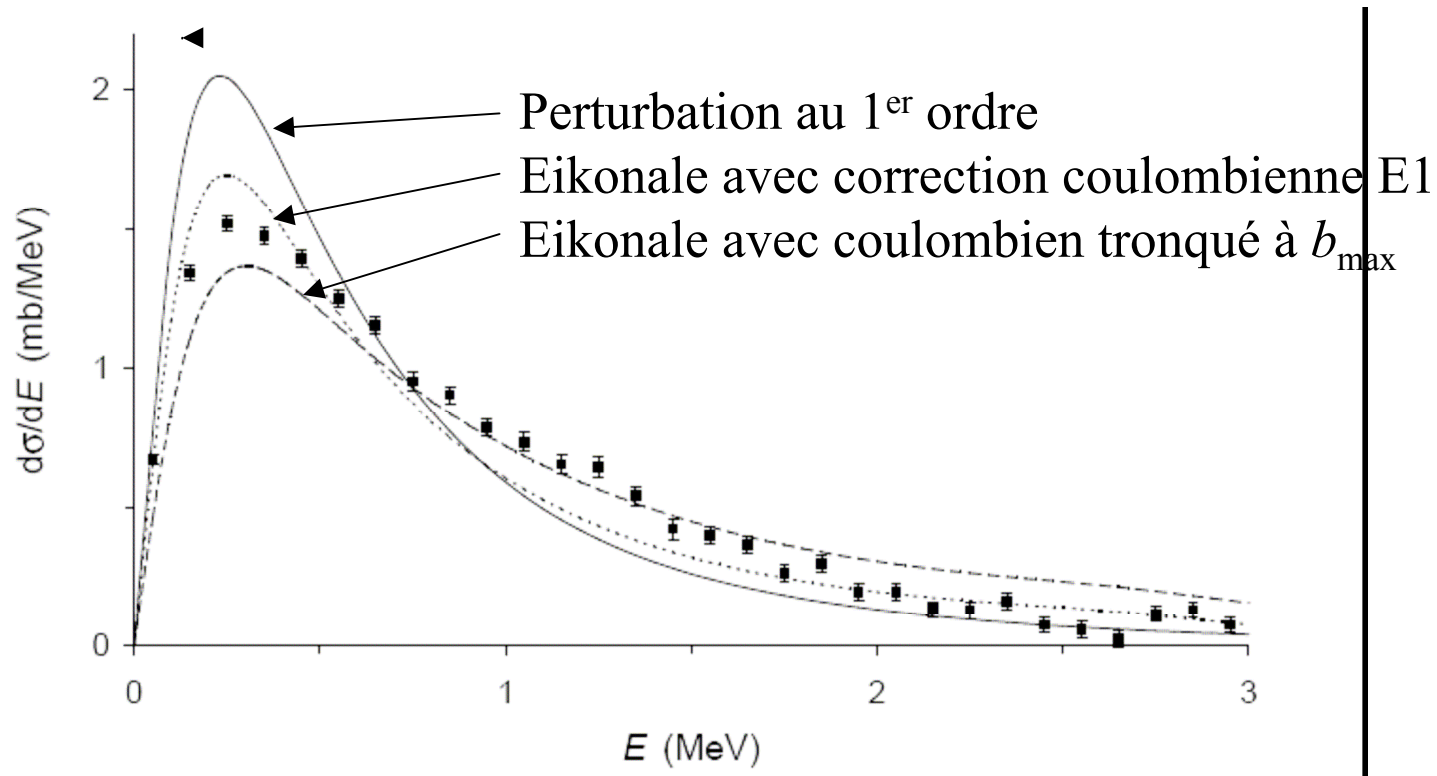
Dissociation

$$S^{\text{eik.}}(\mathbf{k}, \mathbf{b}) = \lim_{Z \rightarrow +\infty} \langle \phi_{\mathbf{k}}^{(-)}(\mathbf{r}) | \hat{\Psi}_{\text{eik.}}(\mathbf{R}, \mathbf{r}) \rangle$$

$$T_{fi} \approx i\hbar v \int d\mathbf{b} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}} S^{\text{eik.}}(\mathbf{k}, \mathbf{b})$$

$$\frac{d\sigma}{d\mathbf{k}d\Omega} = \frac{KK'}{(2\pi)^5} \left| \int d\mathbf{b} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}} S^{\text{eik.}}(\mathbf{k}, \mathbf{b}) \right|^2$$

Dissociation élastique $^{11}\text{Be} + ^{208}\text{Pb}$ à 68 MeV/nucléon



Correction coulombienne E1:

J. Margueron et al, Nucl. Phys. A 720 (2003) 337

B. Abu-Ibrahim, Y. Suzuki, Prog. Theor. Phys. 112 (2004) 1013

Approximation eikonale dynamique

Pas d'approximation **adiabatique** ($H_0 \not\rightarrow E_0$)

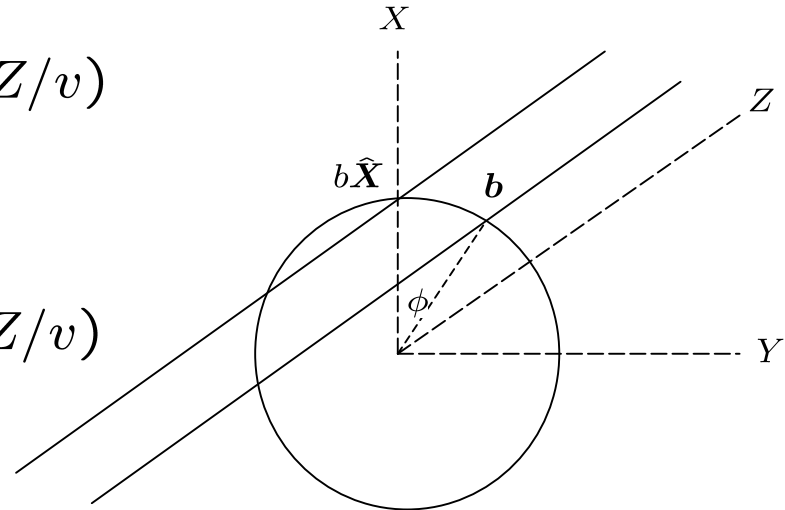
$$i\hbar v \frac{\partial}{\partial Z} \hat{\Psi}(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = (H_0 + V_{PT} - E_0) \hat{\Psi}(\mathbf{R}, \mathbf{r})$$

Formellement identique à ESDT (lignes droites) $t = Z/v$

$$\hat{\Psi}(\mathbf{R}, \mathbf{r}) \propto \hat{\Psi}_{\text{s.c.}}(\mathbf{r}, Z/v)$$

Problème de phase

$$\Psi_{\text{dyn.eik.}}(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = e^{iKZ} e^{-i\varphi_{blz}} \hat{\Psi}_{\text{s.c.}}(\mathbf{r}, Z/v)$$



Amplitude de dissociation

$$S(\mathbf{k}, \mathbf{b}) = \lim_{Z \rightarrow +\infty} \langle \phi_{\mathbf{k}}^{(-)}(\mathbf{r}) | \hat{\Psi}_{\text{s.c.}}(\mathbf{r}, Z/v) \rangle$$

D. B., P. Capel, G. Goldstein, Phys. Rev. Lett. 95 (2005) 082502

Développement en ondes partielles

$$S(\mathbf{k}, \mathbf{b}) = \frac{4\pi}{k} \sum_{lm} Y_l^m(\Omega_k) e^{-im\varphi_b} S_{klm}(b)$$

$$S_{klm}(b) = \lim_{Z \rightarrow +\infty} \langle \phi_{klm}^{(-)} | \hat{\Psi}_{\text{s.c.}}(\mathbf{r}, Z/v) \rangle$$

Développement de la fonction d'onde semi-classique

$$\lim_{Z \rightarrow +\infty} \hat{\Psi}_{\text{s.c.}}(\mathbf{r}, Z/v) = \frac{1}{r} \sum_{lm} \hat{\psi}_{lm}(r) Y_l^m(\Omega_r)$$

Amplitudes partielles de dissociation

$$S_{klm}(b) = i^{-l} e^{i(\sigma_l + \delta_l)} \int_0^\infty u_{kl}(r) \hat{\psi}_{lm}(r) dr$$

Section efficace

$$\frac{d\sigma}{dkd\Omega} = \frac{KK'}{k^2} \left| \sum_{lm} i^{|m|} Y_l^m(\Omega_k) e^{-im\varphi} \int_0^\infty b db J_{|m|}(qb) S_{klm}(b) \right|^2$$

Intégration sur les directions des fragments (Ω_k)

$$\frac{d\sigma}{dE d\Omega} = \frac{KK'}{\hbar v_{cf}} \sum_{lm} \left| \int_0^\infty b db J_{|m|}(qb) S_{klm}(b) \right|^2$$

Intégration sur les directions du c.m. du projectile (Ω)

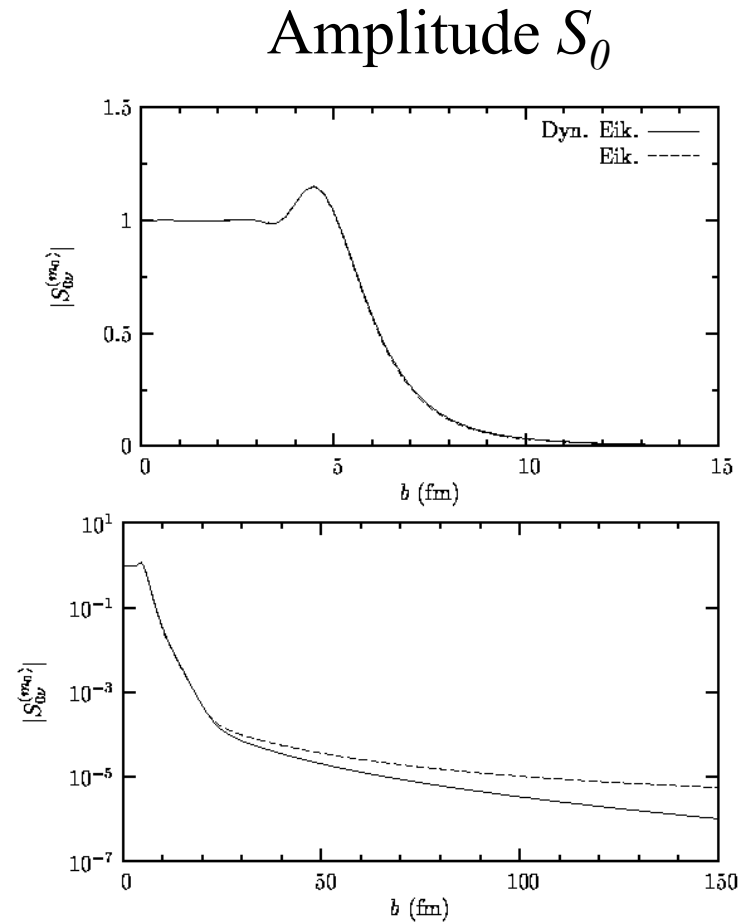
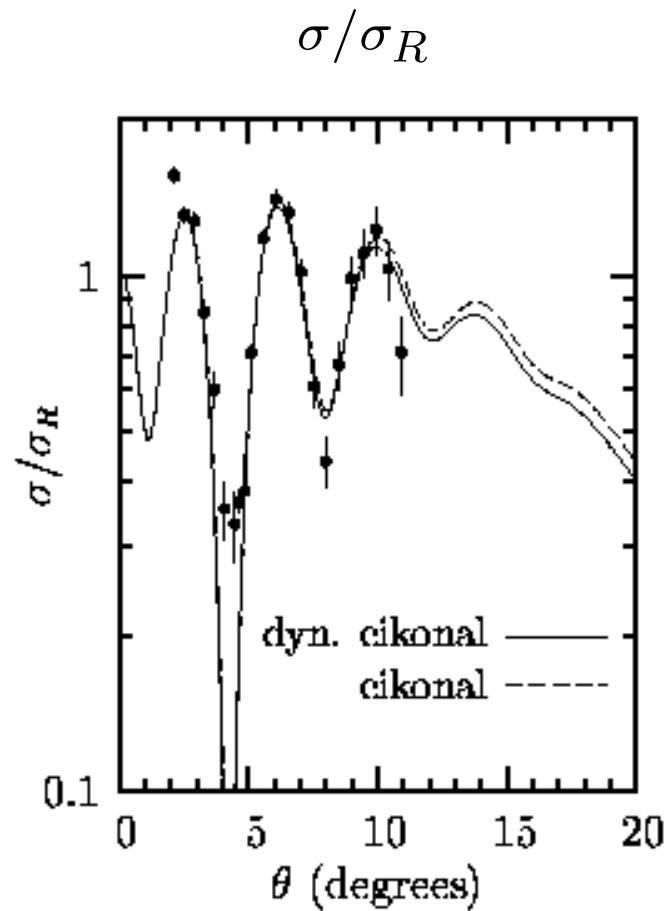
$$\frac{d\sigma}{dE} = \frac{2\pi}{\hbar v_{cf}} \sum_{lm} \int_0^\infty b db S_{klm}^*(b) \int_0^\infty b' db' S_{klm}(b') \int_0^{2K} q dq J_{|m|}(qb) J_{|m|}(qb')$$

Approximation $K \rightarrow \infty$ $\int_0^\infty q dq J_m(qb) J_m(qb') = \frac{1}{b} \delta(b - b')$

Relation avec semi-classique

$$\frac{d\sigma}{dE} \approx \frac{2\pi}{\hbar v_{cf}} \sum_{lm} \int_0^\infty b db |S_{klm}(b)|^2$$

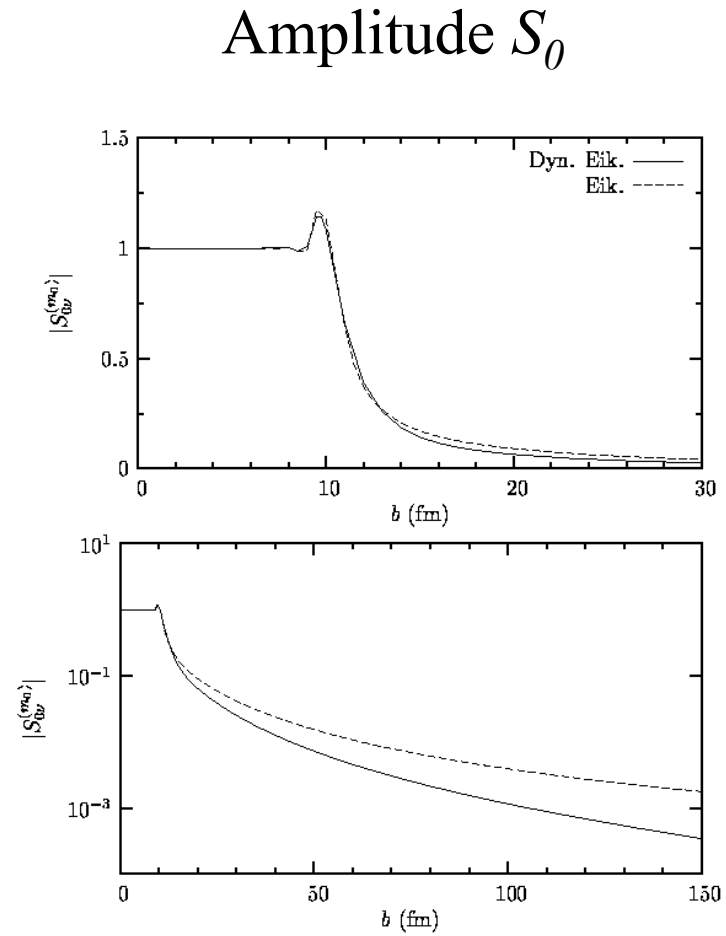
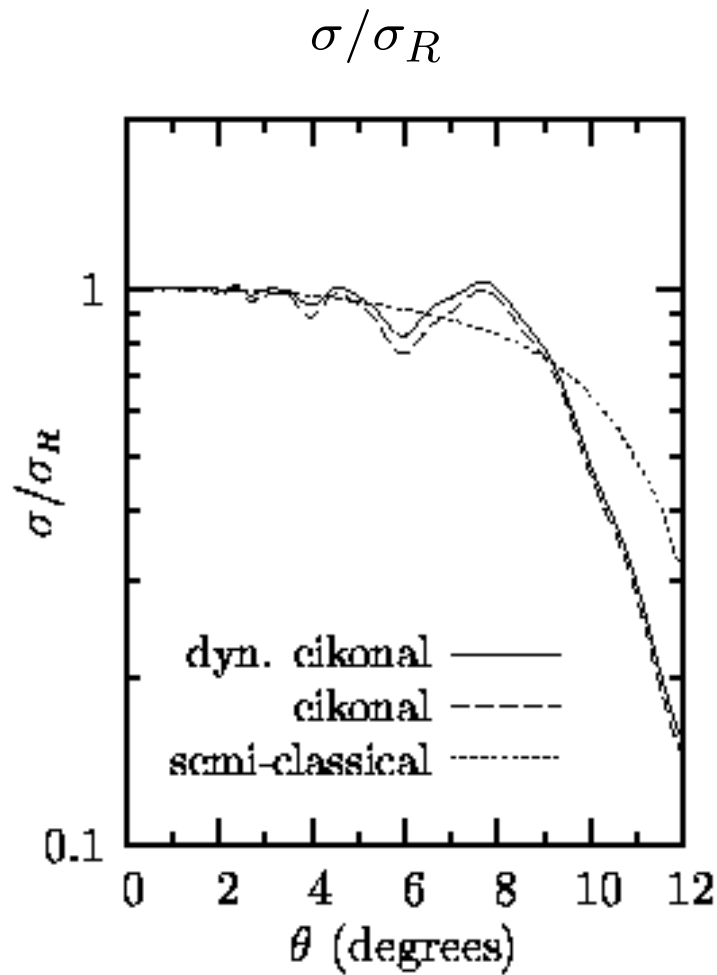
Diffusion élastique $^{11}\text{Be} + ^{12}\text{C}$ à 49.3 MeV/nucléon



Exp. : M.D. Cortina-Gil, PhD thesis, Université de Caen (1996)

Théor.: D. B., P. Capel, G. Goldstein, Phys. Rev. Lett. 95 (2005) 082502

Diffusion élastique $^{11}\text{Be} + ^{208}\text{Pb}$ à 20 MeV/nucléon

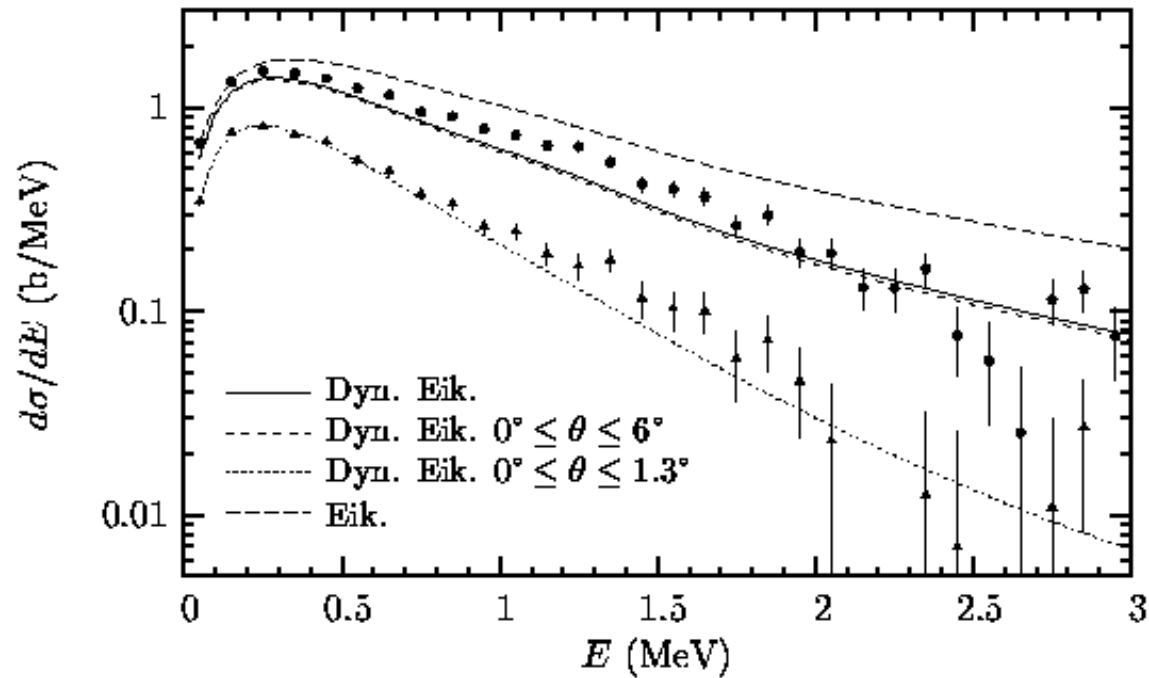


D. B., P. Capel, G. Goldstein, Phys. Rev. Lett. 95 (2005) 082502

Section efficace intégrée sur les angles

Dissociation élastique $^{11}\text{Be} + ^{208}\text{Pb}$ à 69 MeV/nucléon

$$\frac{d\sigma}{dE}(\theta_{\max}) = 2\pi \int_0^{\theta_{\max}} \frac{d\sigma}{dEd\Omega}$$



Trait plein:
$$\frac{d\sigma}{dE} = \frac{2\pi}{\hbar v_{cf}} \sum_{lm} \int_0^{\infty} b db |S_{klm}(b)|^2 \quad (= \text{semi-classique})$$

G. Goldstein, D. B., P. Capel, Phys. Rev. C 73 (2006) 024602

${}^8\text{B}$

Etat lié

2^+ ($p_{3/2}$) à -0.137 MeV

Potentiel $V_0(r)$ pour ${}^7\text{Be} + p$

- Woods-Saxon + spin-orbite (dépendant de l et j)

H. Esbensen, G.F. Bertsch, Nucl. Phys. A600 (1996) 37

- Etat lié non physique $0s_{1/2}$ et résonance non physique $0p_{1/2}$

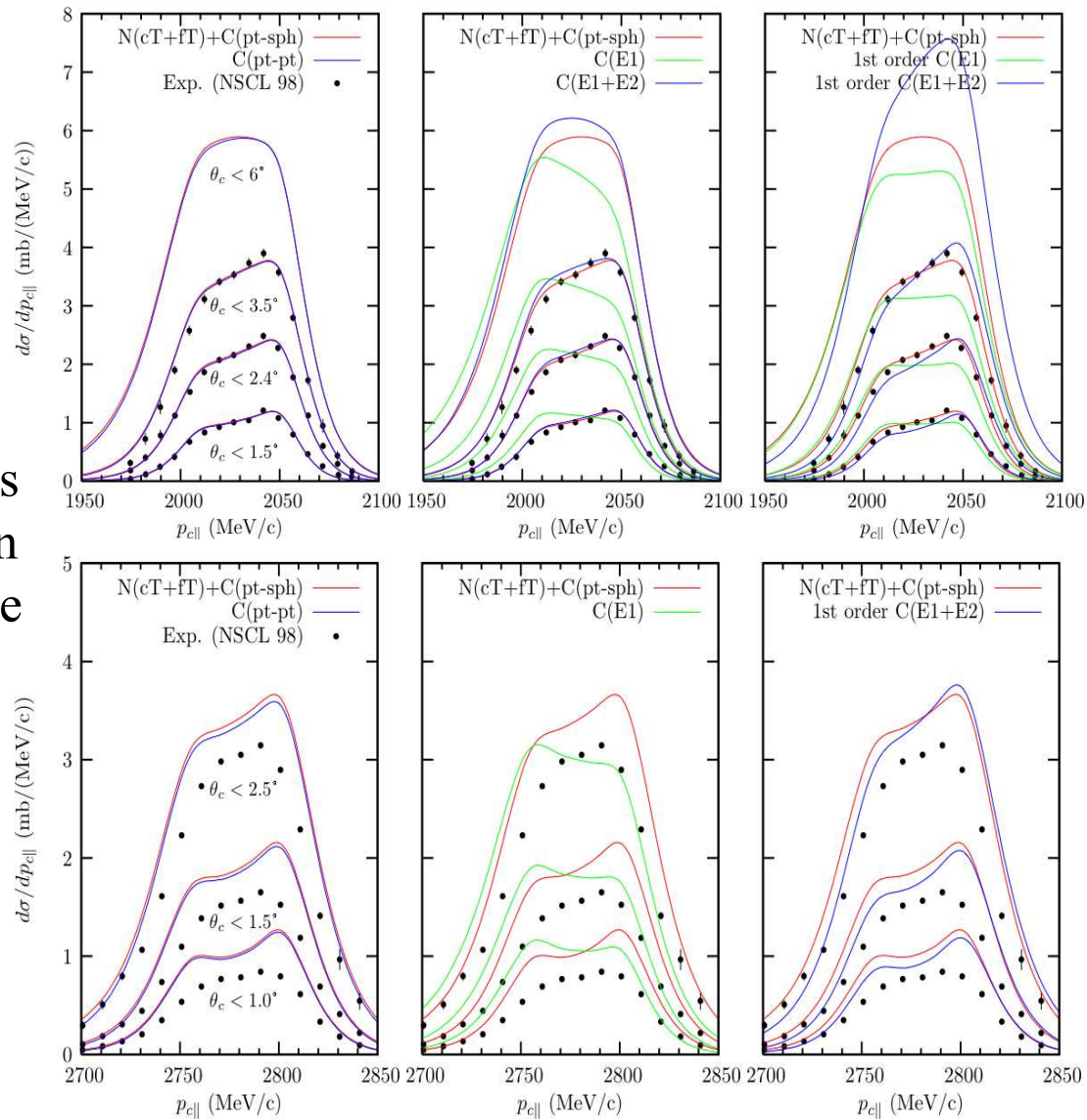
Potentiels optiques pour ${}^{208}\text{Pb} + p$ et ${}^{208}\text{Pb} + {}^7\text{Be}$

Pas de paramètre

Référentiel du laboratoire



Distributions
en impulsion
longitudinale



44 MeV/nucleon :
 $\theta < 1.5, 2.4, 3.5^\circ$

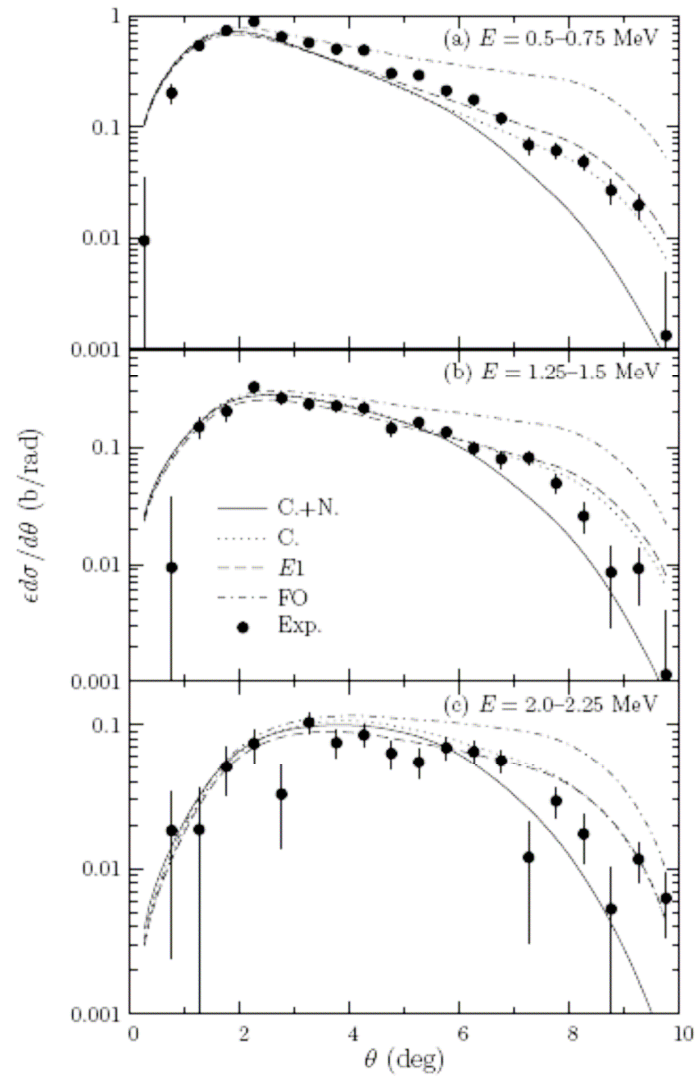
81 MeV/nucleon :
 $\theta < 1.0, 1.5, 2.5^\circ$

Exp: B. Davids et al, Phys. Rev. Lett. 81 (1998) 2209

Théor: G. Goldstein, P. Capel, D.B., Phys. Rev. C 76 (2007) 024608



Distributions
angulaires
convoluées



52 MeV/nucléon

Exp: T. Kikuchi et al, Phys. Lett. B 391 (1997) 261

Théor: G. Goldstein, P. Capel, D.B., Phys. Rev. C 76 (2007) 024608

Voies couplées avec continu discrétisé (CDCC)

Principe: développement sur les états de diffusion

$$\Psi(\mathbf{R}, r) = \phi_0(r)X_0(\mathbf{R}) + \int \phi_{\mathbf{k}}^{(+)}(r)X_{\mathbf{k}}(\mathbf{R})dk$$

Peu pratique!

Importance de la **symétrie de rotation:** bons nombres quantiques J et M

$$\Psi^{JM}(\mathbf{R}, r) = (rR)^{-1} \left(\sum_L Y_{l_0L}^{JM} u_{0l_0}(r) X_{0l_0L}^J(R) + \sum_{lL} Y_{lL}^{JM} \int_0^\infty u_{kl}(r) X_{klL}(R) dk \right)$$

L : projectile-cible

l : fragment-coeur

$$Y_{lL}^{JM} = \sum_{mm'} (lLmm'|JM) Y_l^m(\Omega_r) Y_L^{m'}(\Omega_R)$$

Mais le traitement du continu reste très difficile

Discrétisation du continu

$$\phi_{klm} \rightarrow \phi_{ilm} = u_{il}(r) Y_l^m(\Omega_r)$$

$$\langle \phi_{ilm} | \phi_{i'l'm} \rangle = \delta_{ii'} \quad \langle \phi_{ilm} | H_0 | \phi_{i'l'm} \rangle = E_{il} \delta_{ii'}$$

Approximation: fonction d'onde **CDCC**

$$\Psi_{\text{CDCC}}^{JM}(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = (rR)^{-1} \sum_{ilL} Y_{lL}^{JM} u_{il}(r) X_{ilL}(R)$$

Equations couplées

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu_{PT}} \left(\frac{d^2}{dR^2} - \frac{L(L+1)}{R^2} \right) + V_{ilL,ilL}^J(R) + E_{il} - E_{\text{tot}} \right] X_{ilL}(R) \\ + \sum_{i'l'L' \neq ilL} V_{ilL,i'l'L'}^J(R) X_{i'l'L'}(R) = 0$$

Éléments de matrice du potentiel (intégration sur \mathbf{r}, Ω_R)

$$V_{ilL,i'l'L'}^J(R) = \langle Y_{lL}^{JM} r^{-1} u_{il} | V_{PT} | Y_{l'L'}^{JM} r^{-1} u_{i'l'} \rangle$$

Calcul avec code en voies couplées

Continu discrétisé: deux variantes

- **Pseudo-états** $\phi_{ilm}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N C_{jl}^{(i)} \varphi_{jlm}(\mathbf{r})$

Choix d'une base $\varphi_{jlm}(\mathbf{r}) = \Gamma_{jl}(r) Y_l^m(\Omega)$

$$\sum_{j=1}^N (\langle \varphi_{j'lm} | H_0 | \varphi_{jlm} \rangle - E_{il} \langle \varphi_{j'lm} | \varphi_{jlm} \rangle) C_{jl}^{(i)} = 0$$

- **Etats moyennés en impulsion** « bins » (de carré sommable !)

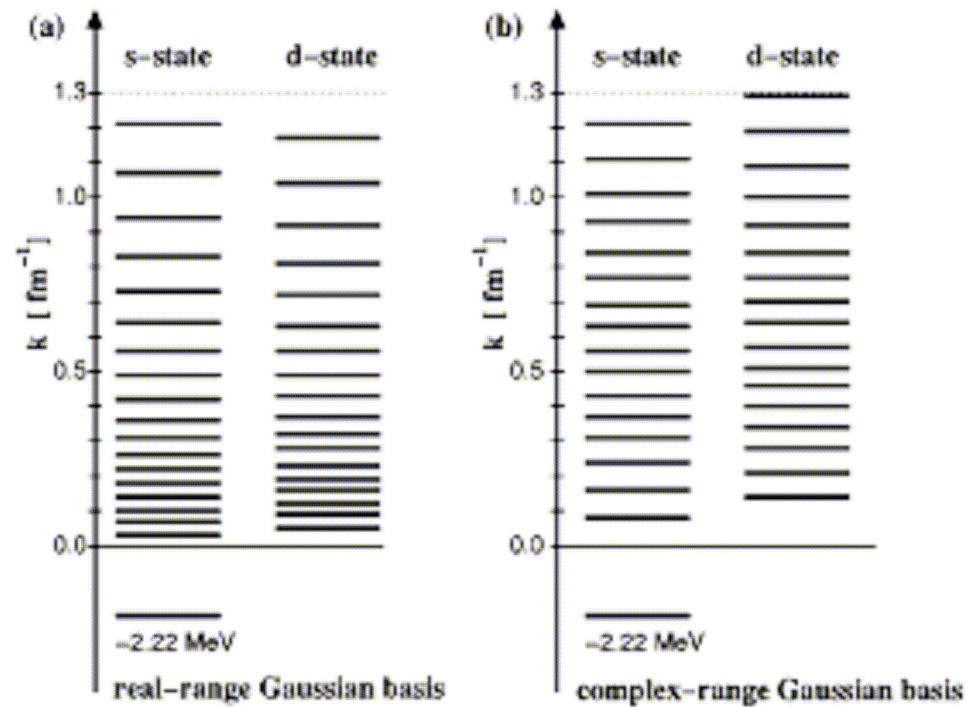
$$\phi_{ilm}(\mathbf{r}) = \frac{1}{W_i} \int_{k_{i-1}}^{k_i} \phi_{klm}(\mathbf{r}) f_i(k) dk \quad W_i = \left(\int_{k_{i-1}}^{k_i} |f_i(k)|^2 dk \right)^{1/2}$$

Exemple non résonnant $f_i(k) = 1 \quad W_i = (k_i - k_{i-1})^{1/2}$

$$E_{il} = \frac{1}{W_i^2} \int_{k_{i-1}}^{k_i} \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu_{cf}} dk = \frac{\hbar^2 (k_i^2 + k_i k_{i-1} + k_{i-1}^2)}{6\mu_{cf}}$$

Résonance $f_{il}(k) = \frac{i\frac{1}{2}\Gamma}{E - E_{Rl} + i\frac{1}{2}\Gamma} \quad E_{il} = E_{Rl}$

Exemple de continu discrétisé (pseudo-états)



T. Matsumoto et al,
Phys. Rev. C 68
(2003) 064607

Eléments de matrice de transition

$$T_{fi} = \langle Y_{lL}^{JM} R^{-1} u_{KL}^{(-)}(R) r^{-1} u_{kl}^{(-)}(r) | V_{PT} | \Psi_{CDCC}^{JM}(\mathbf{R}, \mathbf{r}) \rangle$$

Discrétisation

$$\hat{T}_{jlL} = \langle Y_{lL}^{JM} R^{-1} u_{KL}^{(-)}(R) r^{-1} u_{jl}(r) | V_{PT} | \Psi_{CDCC}^{JM}(\mathbf{R}, \mathbf{r}) \rangle$$

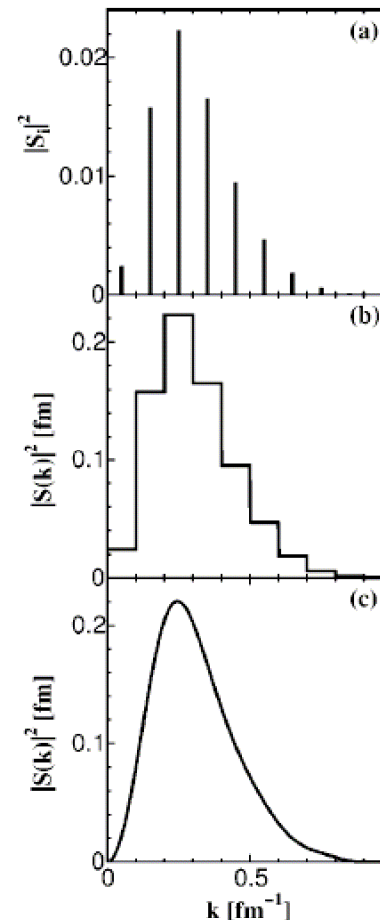
(développement en multipôles)

Interpolation

$$\sum_{jlm} |\phi_{jlm}\rangle \langle \phi_{jlm}| \approx \mathbf{1}$$

$$T_{fi} \approx \sum_j \langle \phi_{klm}^{(-)} | \phi_{jlm} \rangle \hat{T}_{jlL}$$

J.A. Tostevin et al,
Phys. Rev. C 63(2001) 024617

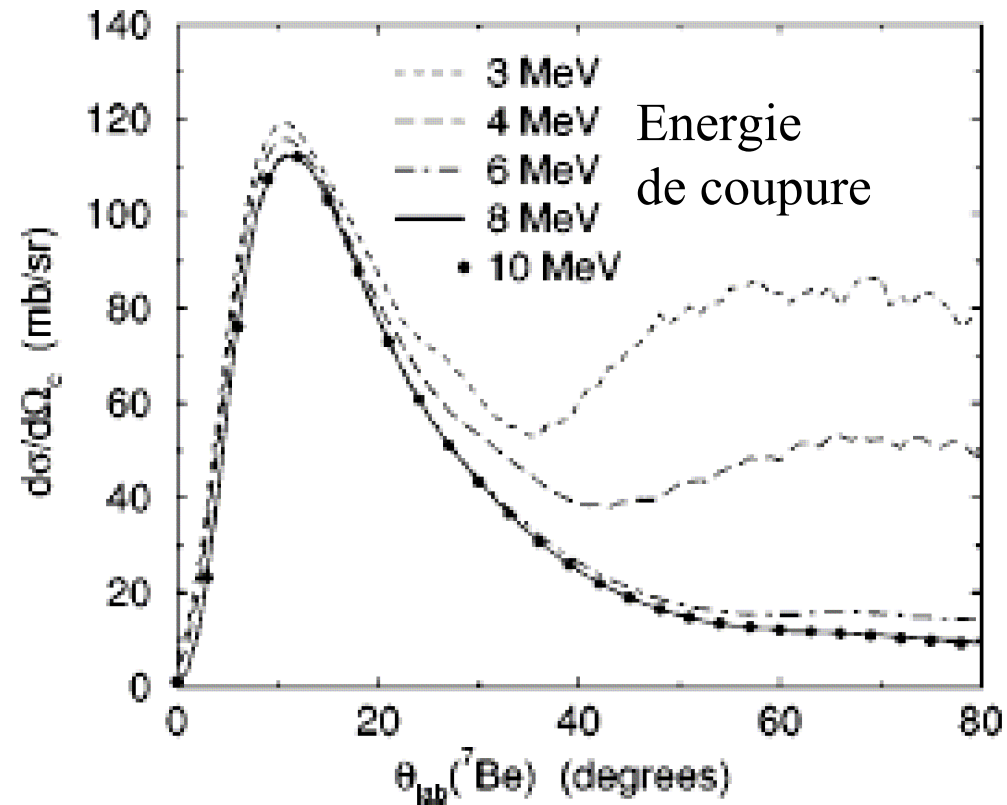


T. Matsumoto et al,
Phys. Rev. C 68
(2003) 064607

Convergence d'un calcul CDCC

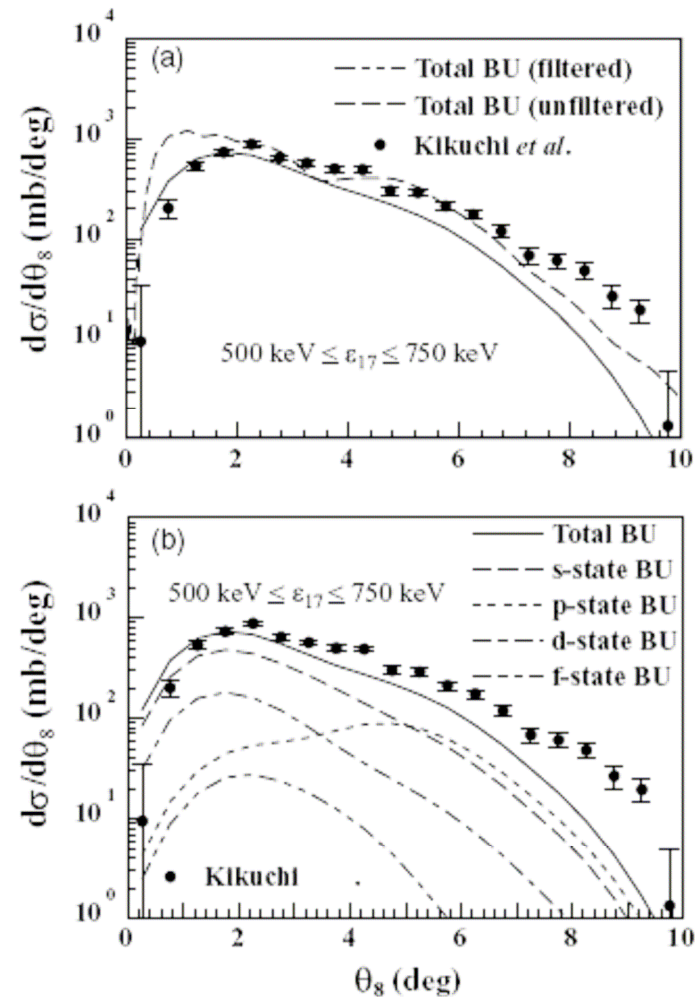


3.2 MeV/nucléon



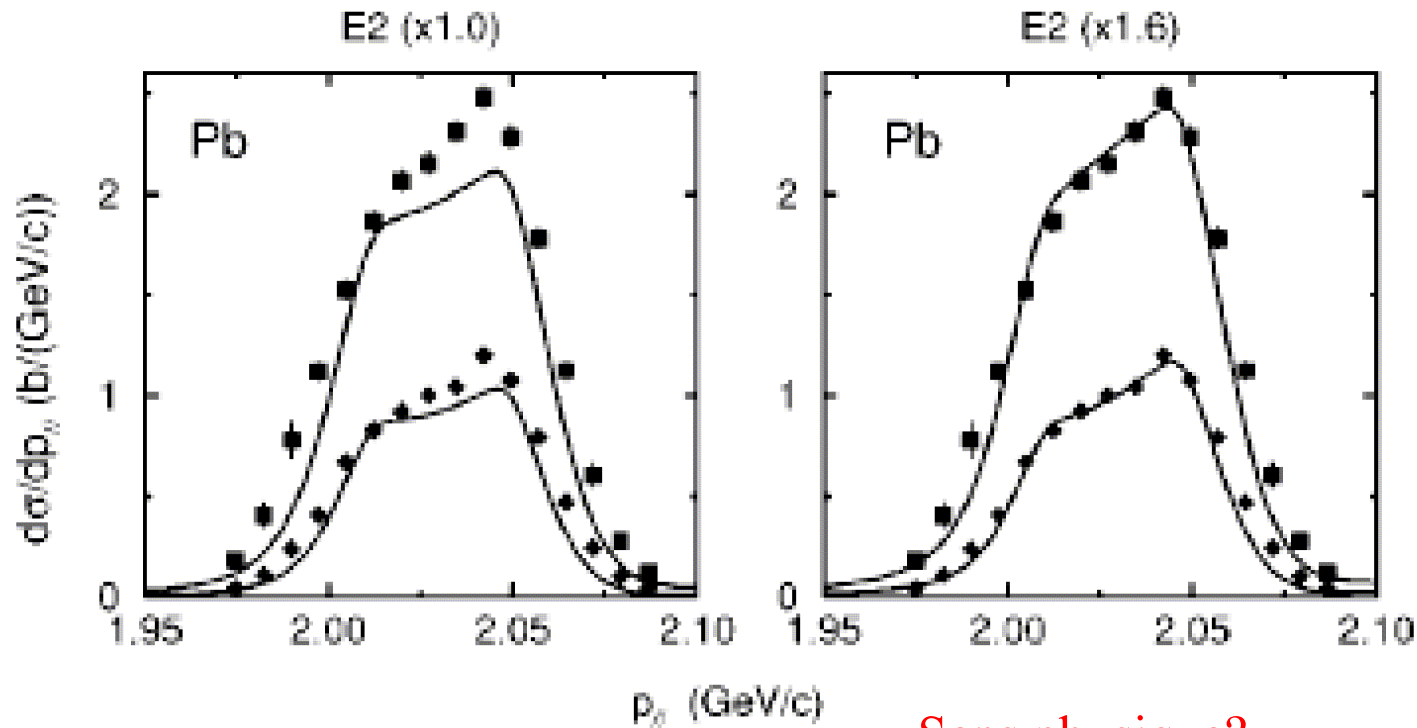
J.A. Tostevin et al, Phys. Rev. C 63 (2001) 024617

Calcul CDCC de ${}^8\text{B} + {}^{208}\text{Pb} \rightarrow {}^7\text{Be} + \text{p} + {}^{208}\text{Pb}$
 RIKEN, 51.9 MeV/nucléon



Theory: K. Ogata *et al*, *Phys. Rev. C* 73 (2006) 024605
 Exp. : T. Kikuchi *et al.*, *Phys. Lett. B* 391 (1997) 161

Calcul CDCC de ${}^8\text{B} + {}^{208}\text{Pb} \rightarrow {}^7\text{Be} + \text{p} + {}^{208}\text{Pb}$
MSU, 44.1 MeV/nucléon



Sens physique?

Theory: J. Mortimer et al, Phys. Rev. C 65 (2002) 064619
Exp. : B. Davids et al., Phys. Rev. C 63 (1997) 065806

Résumé et commentaires

- **Méthodes**
 - CDCC: valable depuis les basses énergies mais difficulté d'évaluer la convergence
 - Approximation eikonale dynamique : hautes énergies, extension des calculs semi-classiques
 - Approximation eikonale : plus simple, problèmes avec Coulomb, à utiliser surtout quand la force nucléaire domine
- **Aspects physiques**
 - Modèle à deux corps (trop) simple : peu d'information physique
 - Extension à des projectiles à 3 corps
(déjà effectué dans CDCC avec pseudo-états, eikonale)
 - Difficulté de comparaison avec les expériences (résolution, acceptance)

Que pouvons-nous apprendre?

- **Projectile à 2 amas**
 - Importance d'une énergie de liaison correcte
 - Faible rôle de l'état de diffusion final (?)
 - Détermination du facteur spectroscopique affectée par des incertitudes (précision de la normalisation des mesures, ANC, potentiel, ...)
 - Recherche de résonances avec la dissociation sur des cibles légères
- **Projectile à 3 amas**
 - Information plus complète sur la structure de la fonction d'onde à partir de mesures en coïncidence
- **Futur**
 - Description microscopique du projectile (modèle microscopique en amas, calculs ab initio)

Approximation adiabatique

J.A. Tostevin, S. Rugmai, R.C. Johnson, Phys. Rev. C 57 (1998) 3225

V_{fT} négligé

Approximation adiabatique $H_0 \rightarrow E_0$

$$\left[\frac{P^2}{2\mu_{PT}} + V_{cT} \left(\mathbf{R} - \frac{m_f}{m_P} \mathbf{r} \right) \right] \Psi_{AD}(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = (E_{\text{tot}} - E_0) \Psi_{AD}(\mathbf{R}, \mathbf{r})$$

→ solution **exacte**

$$\Psi_{AD}^{(+)} = e^{i(m_f/m_c)\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} \phi_{\mathbf{K}}^{(+)}(\mathbf{R}_c) \phi_0(\mathbf{r})$$

$$\mathbf{R}_c = \mathbf{R} - (m_f/m_c)\mathbf{r}$$

Elément de matrice T_{fi} factorisé:

- facteur dépendant de la structure du projectile
- facteur dépendant du mouvement cœur-cible