Théorie des collisions à basse énergie

Jean-Marc Sparenberg
(Daniel Baye, Pierre Descouvemont)

Université Libre de Bruxelles

École Internationale Joliot-Curie / 17-18 septembre 2007

Plan

Plan

Séparation du mouvement du centre de masse

Système de deux particules, masses m_1, m_2, coordonnées $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2 \Rightarrow$

- masse totale M et coordonnée du centre de masse $\boldsymbol{R}$
- masse réduite μ et coordonnée relative $\boldsymbol{r}$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \qquad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$$

(vitesse relative $\boldsymbol{v}$, impulsion relative $\boldsymbol{p} = \mu \boldsymbol{v}$)

Pour un potentiel d'interaction $V(\boldsymbol{r})$,

- centre de masse = particule libre (pas très intéressant)
- on se ramène à un problème à une particule
  - de masse μ et de coordonnée $\boldsymbol{r}$ ($\equiv m_1$ si $m_1 \ll m_2$)
  - d'énergie totale conservée

$$E = T + V(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2\mu} + V(\boldsymbol{r})$$

Séparation du mouvement angulaire

Pour un potentiel central $V(r)$

- le moment cinétique $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ est conservé
  - direction $\Rightarrow$ mouvement plan
  - module $\Rightarrow$ connaissant r, on connait la vitesse angulaire
- on se ramène à un mouvement à une dimension
  - dans un potentiel effectif (dépendant de $\boldsymbol{L}^2$)

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{\boldsymbol{L}^2}{2\mu r^2} + V(r)$$

  - d'énergie totale conservée

$$E = T_r + V_{\text{eff}}(r) = \frac{p_r^2}{2\mu} + V_{\text{eff}}(r)$$

ULB

Exemple : potentiel Newtonien

- Puits dans le potentiel effectif car
  - potentiel central attractif et non confinant

$$V(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r} \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

  - potentiel centrifuge (toujours) répulsif

$$\frac{\boldsymbol{L}^2}{2\mu r^2}$$

- Deux types de solutions
  - $E < 0$: orbites liées, deux points de rebroussement
  - $E = \boldsymbol{p}_{\rm as}^2/2\mu > 0$: orbites libres, un point de rebroussement
    Paramètre d'impact $b \leftrightarrow$ moment cinétique $L = p_{\rm as} b$

Section efficace différentielle

- Problème : cible et faisceau constitués de particules microscopiques
  $\Rightarrow$ paramètre d'impact/moment cinétique non contrôlés
  $\Rightarrow$ on suppose un flux incident homogène n_{inc}

$$\Rightarrow \underbrace{N_{\text{diff}}(\Delta\Omega)}_{\text{diffusées}} = n_{\text{inc}} \quad \times \quad \underbrace{\sigma(\Delta\Omega)}_{\text{section efficace}}$$

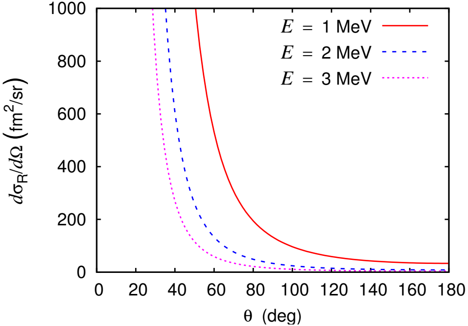
- Section efficace différentielle

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\Omega) = \lim_{\Delta\Omega \to 0} \frac{N_{\text{diff}}(\Delta\Omega)}{n_{\text{inc}}\Delta\Omega}$$

  - dépend de $\Omega = (\theta, \phi)$, symétrie de révolution $\Rightarrow \theta$ seulement
  - dépend de l'énergie E

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega}(E, \theta)$$

Exemple : formule de Rutherford



$$^{16}\mathrm{O} + \alpha$$
$$(Z_1 = 8,\ Z_2 = 2)$$

- Potentiel coulombien : $V(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$
- Section efficace différentielle (aussi valable en quantique)

$$\frac{d\sigma_{\mathrm{R}}}{d\Omega}(E,\theta) = \frac{2\pi db}{2\pi \sin\theta d\theta} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{1}{16E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

Plan

Quantification du moment cinétique orbital

- Hamiltonien du mouvement relatif, où $\boldsymbol{p} = -i\hbar\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}}$

$$H = T + V(r) = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2\mu} + V(r) = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta_{\boldsymbol{r}} + V(r)$$

- Ensemble complet d'observables qui commutent

$$\{H, \boldsymbol{L}^2, L_z\}$$

- Base des états propres correspondants (ondes partielles)

$$\varphi_{Elm}(\boldsymbol{r}) = R_{El}(r)Y_l^m(\Omega) = \frac{u_{El}(r)}{r}Y_l^m(\theta,\phi)$$

- Harmoniques sphériques : $Y_l^m(\theta,\phi) \propto P_l(\cos\theta)e^{im\phi}$
$\Rightarrow \boldsymbol{L}^2 \left|\varphi_{Elm}\right\rangle = \hbar^2 l(l+1)\left|\varphi_{Elm}\right\rangle$ et $L_z\left|\varphi_{Elm}\right\rangle = \hbar m\left|\varphi_{Elm}\right\rangle$

Équation de Schrödinger radiale

- $H\,|\varphi_{Elm}\rangle = E\,|\varphi_{Elm}\rangle$ si et seulement si

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2} + \underbrace{\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{l(l+1)}{r^2} + V(r)}_{\text{pot. effectif } V_l(r)} \right] u_{El}(r) = E u_{El}(r)$$

- Nombre d'onde k tel que $E = \hbar^2 k^2/2\mu \Rightarrow$ écriture simplifiée

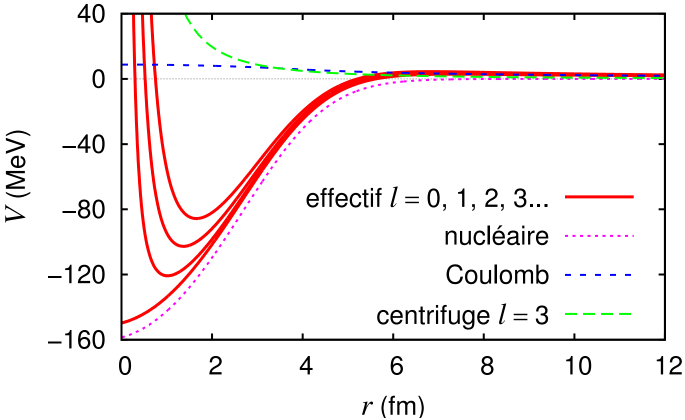
$$\left[-\frac{d^2}{dr^2} + V_l(r) \right] u_{kl}(r) = k^2 u_{kl}(r)$$

(V_l et $E = k^2$ en unités réduites $\hbar = 2\mu = 1$)

- Condition à l'origine (sinon $R(r)$ infinie)

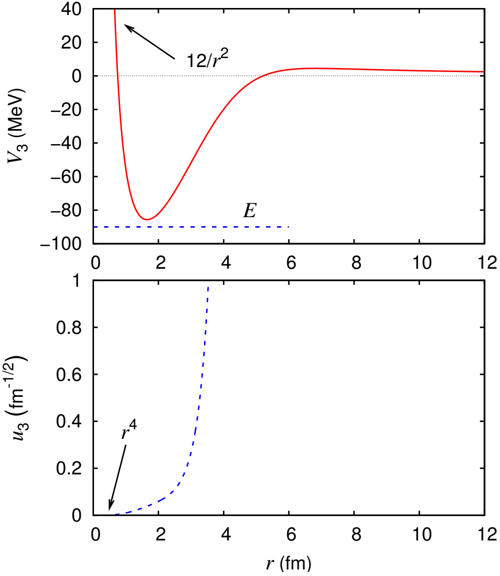
$$u_{kl}(0) = 0$$

Exemple : potentiel d'interaction $^{16}\mathrm{O} + \alpha$ pour $l = 3$



- Coulomb : point-sphère $= 2\eta k/r$ pour $r \geq 4$ fm
  ($\eta =$ paramètre de Sommerfeld, sans dimension)
- Nucléaire : mélange Gaussienne/Woods-Saxon [Michel et al., 1983]

$E = k^2 = -\kappa^2 < 0$, toujours inférieure au potentiel



$$\frac{u''_{kl}(r)}{u_{kl}(r)} = \underbrace{\kappa^2 + V_l(r)}_{>0}$$

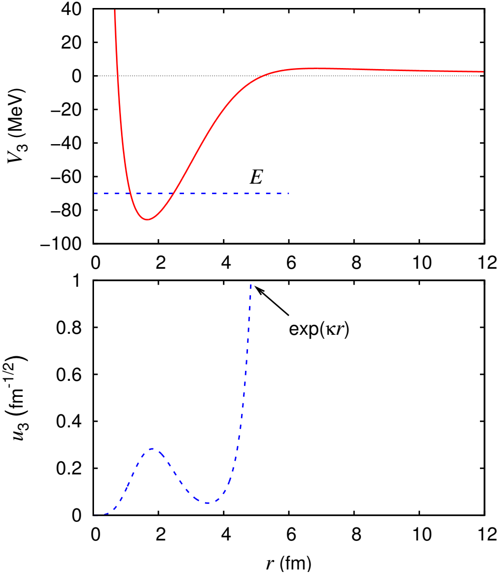
- u et u'' de même signe
  $\Rightarrow$ u "s'éloigne de l'axe"
- À l'origine, coeur répulsif

$$V_l(r) \underset{r\to 0}{\sim} \frac{l(l+1)}{r^2}$$

$\Rightarrow$ fonction d'onde "écrasée"

$$u_{kl}(r) \underset{r\to 0}{\sim} r^{l+1}$$

$E = -\kappa^2 < 0$, parfois supérieure au potentiel



$$\frac{u''_{kl}(r)}{u_{kl}(r)} = \underbrace{\kappa^2 + V_l(r)}_{>0 \text{ ou } <0}$$

- Points d'inflexion là où

$$V_l(r) = E$$

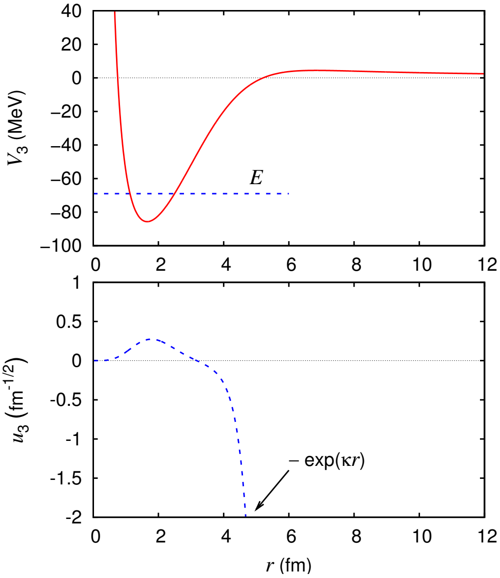
u "se rapproche" de l'axe

- À l'infini, $V_l(r) \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0$

$$u_{kl}(r) \underset{r\to\infty}{\sim} \underbrace{Ce^{\kappa r}}_{\text{dominant}} + De^{-\kappa r}$$

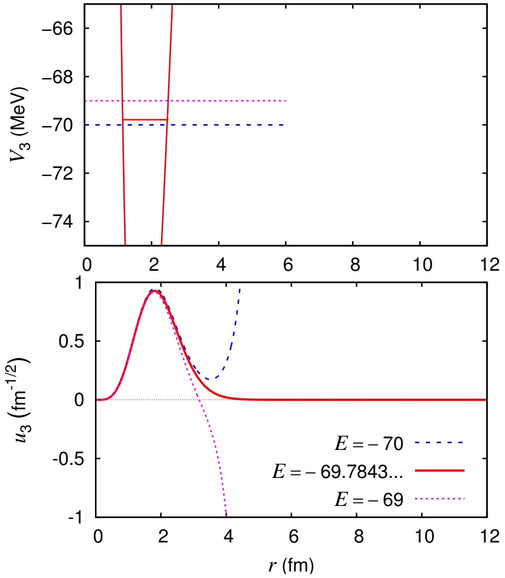
non bornée (! ! $\eta = 0$! !)

$E = -\kappa^2 < 0$, parfois supérieure au potentiel



- E croît
- u se rapproche de l'axe... et le croise ⇒ noeud radial
- À l'infini, u change de signe, toujours non bornée

$E = -\kappa^2 < 0$, premier état lié



Pour une énergie unique

- apparition du noeud radial
- changement de signe
- décroissance exponentielle

$$u_{kl}(r) \underset{r\to\infty}{\sim} \underbrace{Ce^{\kappa r}}_{=0} + De^{-\kappa r}$$

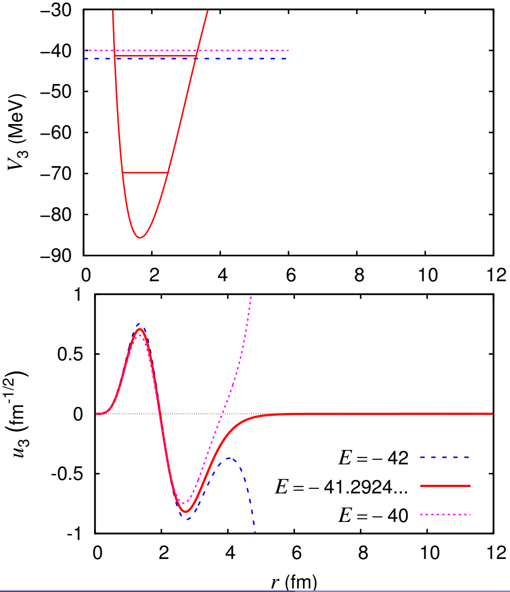
bornée, normalisable

- D = constante de normalisation asymptotique

spectre discret

énergies liées quantifiées

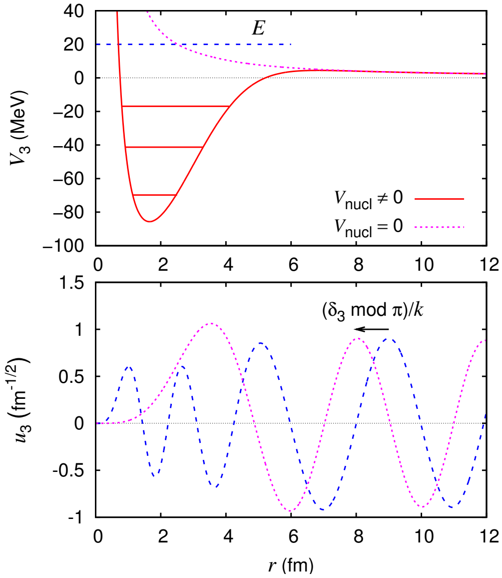
$E = -|k|^2 < 0$, second état lié



- Idem pour second état lié, avec 1 noeud radial supplémentaire
- Idem pour le troisième état lié, avec 2 noeuds radiaux

. . .

$E = k^2 \geq 0$, état libre, déphasage asymptotique



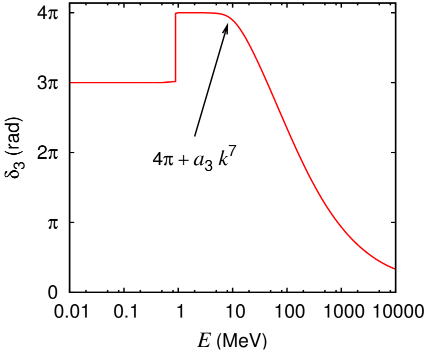
$$u_{kl}(r) \underset{r\to\infty}{\propto} Ce^{ikr} + De^{-ikr}$$

- bornée $\Rightarrow$ spectre continu
- normalisation arbitraire
- potentiel réel $\Rightarrow$

$$u_{kl} \underset{r\to\infty}{\propto} \sin\left[kr - l\frac{\pi}{2} + \delta_l(k)\right]$$

- déphasage $\delta_l(k)$
- $V_{\text{nucl}} = 0 \Rightarrow \delta_l(k) = 0$ $\Rightarrow$ résume l'influence du potentiel à grande distance
- ambigüité de π dans cette définition du déphasage, soluble en théorie

Définition et propriétés théoriques des déphasages



- $\delta_l(k)$ continu
- $\delta_l(\infty) = 0$ (potentiel négligeable) Relativiste !
- Théorème de Levinson
  $\delta_l(0) = N_l \pi$, nombre d'états liés
- Développement en portée effective
  $\delta_l(k) - \delta_l(0) = a_l k^{2l+1} + \ldots$
  longueur de diffusion a_l

- Formule théorique sans ambigüité de π (! ! $l = \eta = 0$! !)

$$\delta_0(k) = -k \int_0^\infty V_0(r) \frac{u^2}{u'^2 + k^2 u^2} dr$$

[Chadan *et al.*, JMP 2001]

Matrice de collision

$$
\begin{aligned}
u_{kl}(r) \underset{r\to\infty}{\propto} & \sin\left[kr - l\frac{\pi}{2} + \delta_l(k)\right] \\
\underset{r\to\infty}{\propto} & \underbrace{e^{-i(kr-l\pi/2)}}_{\text{onde entrante}} - \underbrace{e^{i(kr-l\pi/2)}}_{\text{onde sortante}} \times \underbrace{e^{2i\delta_l(k)}}_{U_l(k)}
\end{aligned}
$$

$U_l(k) =$ "matrice" de collision

- unitaire (diffusion élastique $\Rightarrow$ conservation du flux)
- dimension $=$ nombre de voies (1 ici)
- $V_{\text{nucl}} = 0 \Rightarrow \delta_l(k) = 0 \Rightarrow U_l(k) = 1$
  (diffusion libre/Coulombienne)
- ambigüité de π pour $\delta_l(k) \Rightarrow U_l(k)$ inchangée

Sections efficaces

- État stationnaire de diffusion $H\,|\varphi_{k\mathbf{1}_z}\rangle = E\,|\varphi_{k\mathbf{1}_z}\rangle$ avec

$$\varphi_{k\mathbf{1}_z}(\boldsymbol{r}) \underset{r\to\infty}{\propto} \left[e^{ikz} + \frac{e^{ikr}}{r} f(k,\theta)\right]$$

  - symétrie de révolution azimutale
  - paramètre d'impact non défini
  - base pour un traitement en paquets d'ondes [Taylor, 1972]

- Amplitude de diffusion $f(k,\theta) \Rightarrow$
  - section efficace différentielle

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(E,\theta) = |f(k,\theta)|^2$$

  - section efficace totale

$$\sigma(E) = \int_{4\pi} |f(k,\theta)|^2\, d\Omega$$

Méthode des déphasages pour l'amplitude de diffusion

- Décomposition en ondes partielles de $|\varphi_{k\mathbf{1}_z}\rangle \Rightarrow m = 0$, $l = 0, \ldots, \infty$

$$u_{kl}(r) \underset{r\to\infty}{\propto} \sin(kr - l\pi/2) + e^{i(kr-l\pi/2)} f_l(k)$$

amplitude de diffusion partielle $f_l(k) = \frac{U_l(k)-1}{2ik} = \frac{e^{i\delta_l(k)}\sin\delta_l(k)}{k}$

$$\Rightarrow f(k,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) f_l(k) \underbrace{P_l(\cos\theta)}_{\text{Legendre}}$$

- Sections efficaces : interférences dans $d\sigma/d\Omega$, pas dans

$$\sigma(E) = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_l(E) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\, |f_l(k)|^2$$

- Avantage : à basses énergies, quelques ondes partielles seulement
- Mais grandeurs mesurables $\sigma \neq$ grandeurs calculables δ_l

Autres méthodes de calcul de l'amplitude de diffusion

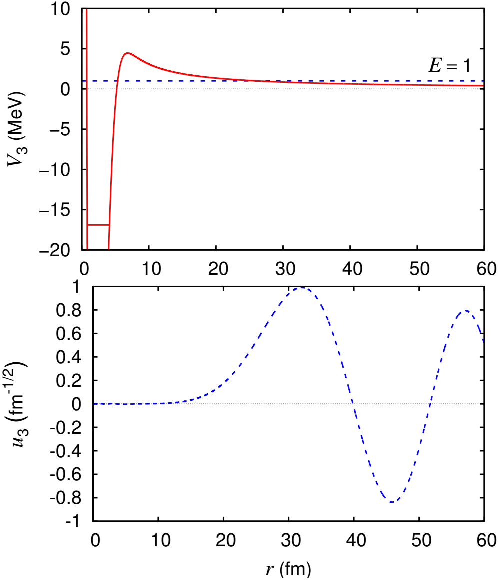
- Hautes énergies ($E \gg V$) : approximation de Born
- Amplitude de référence :

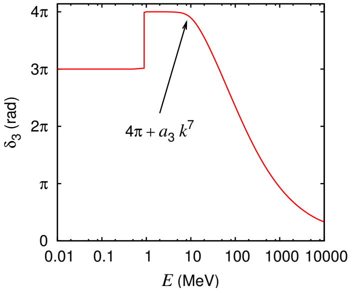
$$V = V_I + V_{II} \quad \Rightarrow \quad f = f_I + f_{II}$$

Applications

  - $V_I =$ Coulomb (longue portée), $V_{II} =$ nucléaire (courte portée)
  - $V_{II} \ll V_I$ (perturbation) $\Rightarrow$ approximation de l'onde déformée (Born)

$$E = k^2 \gtrapprox 0$$





- barrière “infranchissable”
- probabilité de transmission (facteur de pénétration)

$$P_l \underset{k\to 0}{\propto} k^{2l+1}$$

Comportement de la section efficace à (très) basse énergie

- Barrières Coulombienne et centrifuge $\Rightarrow$ seul le cas $l = \eta = 0$ a un déphasage non négligeable, donné par le développement en portée effective

$$\delta_0(k) - \delta_0(0) \approx a_0 k$$

  - $a_0 =$ longueur de diffusion
  - $|a_0|$ très grande lorsqu'état lié ou virtuel proche de $E = 0$

- Amplitude de diffusion correspondante isotrope

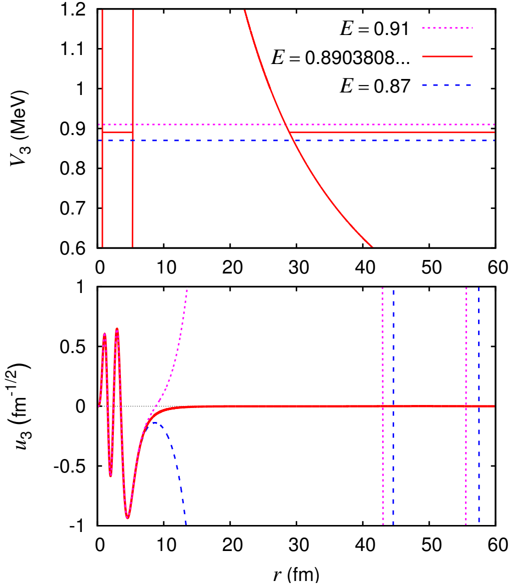
$$f(k, \theta) \approx a_0$$

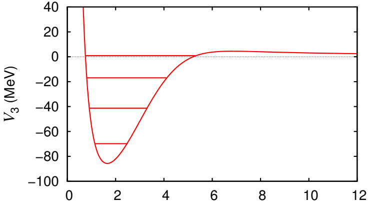
- Sections efficaces $\equiv$ sphère de rayon a_0

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx a_0^2 \qquad \sigma \approx 4\pi a_0^2$$

- Simplification physique importante (cf. gaz ultrafroids) mais ne tient pas compte des résonances

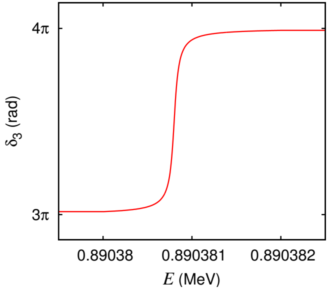
$E = k^2 > 0$, résonance





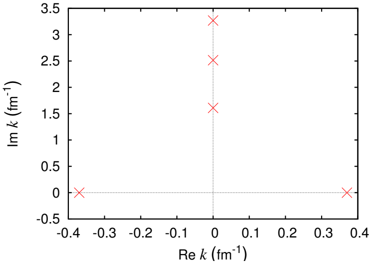
- Résonance : analogie avec état lié mais oscillations à grande distance
- Hors résonance : changement de signe $=$ augmentation de π du déphasage

Résonance : déphasage/matrice de collision



$$\delta_l(E) \underset{E\approx E_r}{\approx} \delta_{\text{fond}} + \arctan\frac{\Gamma/2}{E_r - E}$$

- E_r = énergie, Γ = largeur
- Durée de vie : $\tau = \hbar/\Gamma$
- Exemple : ^{16}O + α, $l = 3$: $\Gamma \approx 0.08$ eV $\Rightarrow \tau \approx 8$ fs



$$U_l(E) \underset{E\approx E_r}{\approx} U_{\text{fond}} \frac{E - E_r - i\Gamma/2}{E - E_r + i\Gamma/2}$$

- États liés : pôles dans Im $k > 0$
- Résonances : pôles dans Im $k < 0$
- (État virtuel : pôle sur Im $k < 0$)

Résonance : sections efficaces

- Variation brutale de la section efficace partielle correspondante

$$\sigma_l(E) \underset{E \approx E_r}{\approx} \frac{4\pi}{k^2}(2l+1)\frac{\Gamma^2/4}{(E_r - E)^2} \quad \left(\delta_{\text{fond}} = 0\right)$$

(formule de Breit-Wigner)

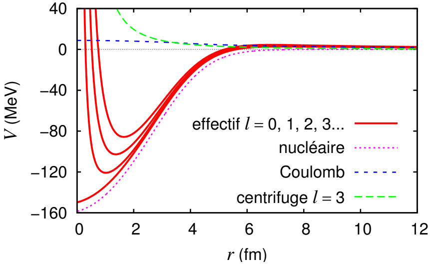
Plan

Motivations

- Point de vue théorique : méthode efficace de résolution de l'équation de Schrödinger, identique pour les états liés et les états libres (discrétisation du continu)
- Point de vue expérimental : méthode simple de paramétrisation de sections efficaces expérimentales
- Particulièrement utile (et historiquement née) en physique nucléaire
- Applicable aux collisions élastiques et aux (R)éactions
- Utilisation récente en physique atomique, gaz ultrafroids, chimie quantique. . .

Principe : division de l'espace en deux régions

- Région extérieure ($r > a$) : centrifuge + Coulomb (longue portée, “simples”)
- Région intérieure ($r < a$) : centrifuge + Coulomb + nucléaire (courte portée, compliqué car dépend de la structure des noyaux)
- Rayon a : arbitraire mais borné inférieurement ; peut être optimisé
- Principe : résolution complète à l'intérieur (modèle potentiel, modèle microscopique...), puis raccord avec l'extérieur en $r = a$



Exemple : ^{16}O $+ \alpha$, $a \gtrsim 7$ fm

Résolution de l'équation dans la région intérieure

1. Équation de Schrödinger radiale

$$\left[-\frac{d^2}{dr^2} + V_l(r)\right] u_{kl}(r) = E u_{kl}(r)$$

2. Condition aux limites à l'origine : $u_{kl}(0) = 0$
3. Condition aux limites en a

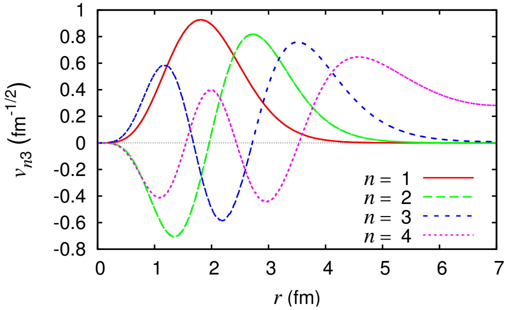
$$\left.\frac{r u'_{kl}(r)}{u_{kl}(r)}\right|_{r=a} = B$$

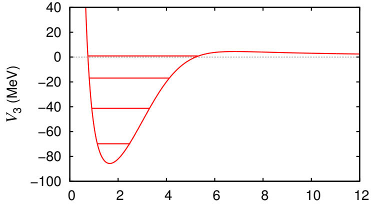
$\Rightarrow$ problème aux limites hermitique (fonction de a et B)

- valeurs propres réelles et dénombrables : E_{nl}, $n = 1, \ldots, \infty$
- fonctions propres $v_{nl}(r)$ = base dans la zone intérieure

ULB

Exemple : $^{16}\mathrm{O} + \alpha,\ l = 3,\ a = 7,\ B = 0$





n	E_{n3} (MeV)	Énergie état lié/résonance (MeV)
1	-69.7867	-69.7867
2	-41.2925	-41.2925
3	-16.9037	-16.9032
4	0.886485	0.8903808
5	7.77366	-
⋮	⋮	

Définition de la matrice R

- Développement formel de u_{kl} dans la base des v_{nl}

$$u_{kl}(r) = \sum_{n=1}^{\infty} v_{nl}(r)\langle v_{nl}|u_{kl}\rangle = \left[u'_{kl}(a) - B\frac{u_{kl}(a)}{a}\right]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_{nl}(r)v_{nl}(a)}{E_{nl}-E}$$

- Dérivée logarithmique de u_{kl} à la frontière (indépendante de B)

$$\frac{au'_{kl}(a)}{u_{kl}(a)} = B + \frac{1}{R_l(E)}$$

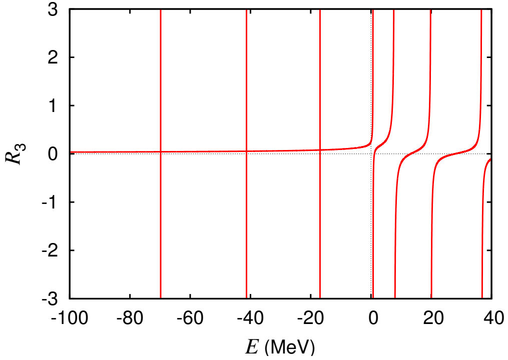
- Matrice R (fonction de a et B)

$$R_l(E) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_{nl}^2(a)}{E_{nl}-E} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tilde{\gamma}_{nl}^2}{E_{nl}-E}$$

- E_{nl} = pôles de la matrice R, $\tilde{\gamma}_{nl}^2$ = largeurs réduites formelles

Exemple : ^{16}O $+ \alpha$, $l = 3$, $a = 7$, $B = 0$

$$R_l(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\gamma}_{nl}^2}{E_{nl} - E}$$



- Fonction réelle
- Monotone croissante
- Infinité de singularités

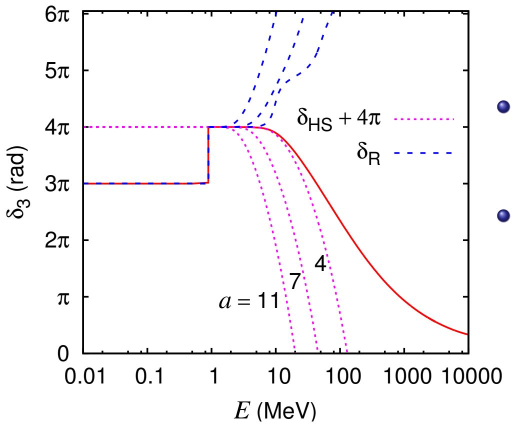
Calcul de la matrice de collision/du déphasage

- Zone extérieure : $u_{kl}(r) \propto I_l(kr) - O_l(kr)U_l(k)$
  - $I_l = O_l^* =$ fonctions Coulombiennes (“Ingoing” et “Outgoing”)
  - $O_l = e^{i(kr - l\pi/2)}$ pour $\eta = 0$
- Continuité avec la zone intérieure (matrice R) en $r = a \Rightarrow$

$$U_l(k) = \underbrace{\frac{I_l(ka)}{O_l(ka)}}_{\exp[2i\delta_{l\mathrm{HS}}(k)]} \underbrace{\frac{1 - [S_l(ka) - B - iP_l(ka)]\, R_l(E)}{1 - [S_l(ka) - B + iP_l(ka)]\, R_l(E)}}_{\exp[2i\delta_{l\mathrm{R}}(k)]}$$

  - $O'(ka)a/O(ka) = S_l(ka) + iP_l(ka)$
  - $S_l, P_l =$ facteurs de déplacement (“Shift”) et de pénétration
- Décomposition de la matrice de collision (et du déphasage)
  - sphère dure (“Hard Sphere”, $u_{kl}(a) = 0$) : variation lente
  - matrice R ou résonnant : variations rapides possibles

Exemple : ^{16}O $+ \alpha$, $l = 3$, $n = 90$



- Calcul théorique
  - grand nombre de pôles
  - a arbitraire ($> a_0$)
- Paramétrisation de données expérimentales
  - nombre restreint de pôles
  - optimiser a possible ($\neq a_0$)

Approximation à un pôle (isolé ou unique) : $R_l(E) \approx \frac{\tilde{\gamma}_1^2}{E_1 - E}$

- Matrice de collision résonnante de forme Breit-Wigner

$$U_{l\mathrm{R}}(E) \approx \frac{1 - [S_l(ka) - B - iP_l(ka)]\,\frac{\tilde{\gamma}_1^2}{E_1 - E}}{1 - [S_l(ka) - B + iP_l(ka)]\,\frac{\tilde{\gamma}_1^2}{E_1 - E}} \underset{E \approx E_r}{\approx} \frac{E - E_r - i\Gamma/2}{E - E_r + i\Gamma/2}$$

  - énergie de la résonance

$$E_r \approx E_1 - \tilde{\gamma}_1^2\,[S_l(k_r a) - B]$$

    où $S =$ facteur de déplacement (“Shift”)
  - largeur de la résonance

$$\Gamma \approx 2 \frac{\tilde{\gamma}_1^2}{1 + \tilde{\gamma}_1^2 \frac{dS_l(k_r a)}{dE}} P_l(k_r a) \equiv 2\gamma^2 P_l(k_r a)$$

    $=$ probabilité de présence en a $\times$ transmission de a à l'infini
- Paramètres formels E_1, $\tilde{\gamma}_1^2$ $\neq$ paramètres physiques E_r, γ^2
- Développement en portée effective correct (pas pour Breit-Wigner)

Plan

Définition des voies

- Jusqu'ici, collisions élastiques de deux particules sans spin
- Généralisations à deux particules
  - particules de spins I_1 et $I_2 \Rightarrow (2I_1+1)(2I_2+1)$ voies $\Rightarrow$ matrices
  - collisions inélastiques : $a + b \longrightarrow a + b^*$ $\Rightarrow$ matrices et seuil $\Delta = (m_{b^*} - m_b)c^2$
  - réactions : $a + b \longrightarrow c + d$ $\Rightarrow$ matrices, seuil, coordonnées relatives $r_{ab} \neq r_{cd}$
- Voie caractérisée par état interne (composition, énergie de masse, (état de) spin. . .) des particules infiniment séparées

Voies ouvertes et fermées

$$\underbrace{a+b}_{\text{voie } \alpha} \rightarrow \underbrace{c+d}_{\text{voie } \beta}$$

- Masses réduites, coordonnées relatives : $\mu_\alpha, \boldsymbol{r}_\alpha$ et $\mu_\beta, \boldsymbol{r}_\beta$
- Énergies, nombres d'ondes relatifs : $E_\alpha, \boldsymbol{k}_\alpha$ et $E_\beta, \boldsymbol{k}_\beta$
- Énergies de seuil : $\Delta = (m_c + m_d - m_a - m_b)c^2$
- Voie ouverte $\Leftrightarrow E_\alpha > \Delta$

Sections efficaces différentielles

- États stationnaires de diffusion $H\left|\varphi_{k_\beta \mathbf{1}_{z_\beta}}\right\rangle = E\left|\varphi_{k_\beta \mathbf{1}_{z_\beta}}\right\rangle$ avec

$$\langle \boldsymbol{r}_\gamma | \varphi_{k_\beta \mathbf{1}_{z_\beta}} \rangle \underset{r_\gamma \to \infty}{\propto} \left[\delta_{\beta\gamma} e^{ik_\beta z_\beta} + \left(\frac{\mu_\gamma}{\mu_\beta}\right)^{1/2} f_{\beta\gamma}(k_\beta, \theta_\gamma) \frac{e^{ik_\gamma r_\gamma}}{r_\gamma} \right]$$

- $f_{\beta\gamma}(k_\beta, \theta_\gamma)$ sont les amplitudes de diffusion, dont on déduit les sections efficaces différentielles

$$\frac{d\sigma_{\beta\gamma}}{d\Omega_\gamma}(k_\beta, \theta_\gamma) = \frac{k_\gamma}{k_\beta} \left| f_{\beta\gamma}(k_\beta, \theta_\gamma) \right|^2$$

- Décomposition en ondes partielles de moment cinétique total $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{I}_1 + \boldsymbol{I}_2$ et de parité $\pi \Rightarrow$ sommes compliquées faisant intervenir des matrices de collision partielles $\boldsymbol{U}^{J\pi}(E)$

ULB

Calcul des matrices de collision partielles

Exemple à deux voies

- Système d'équations de Schrödinger radiales couplées $(EJ\pi)$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2\mu_\beta}\frac{d^2}{dr_\beta^2} + V_{\beta\beta}^{l_\beta}(r_\beta) & V_{\beta\gamma}(r_\gamma) \\ V_{\gamma\beta}(r_\beta) & -\frac{1}{2\mu_\gamma}\frac{d^2}{dr_\gamma^2} + V_{\gamma\gamma}^{l_\gamma}(r_\gamma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\beta\beta}(r_\beta) \\ u_{\gamma\beta}(r_\gamma) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k_\beta^2 & 0 \\ 0 & k_\gamma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\beta\beta}(r_\beta) \\ u_{\gamma\beta}(r_\gamma) \end{pmatrix}$$

- Matrice de collision $\boldsymbol{U}^{J\pi}(E)$

$$\begin{pmatrix} u_{\beta\beta}(r_\beta) & u_{\beta\gamma}(r_\beta) \\ u_{\gamma\beta}(r_\gamma) & u_{\gamma\gamma}(r_\gamma) \end{pmatrix} \underset{r\to\infty}{\propto} \begin{pmatrix} e^{-i\left(k_\beta r_\beta - l_\beta \frac{\pi}{2}\right)} & 0 \\ 0 & e^{-i\left(k_\gamma r_\gamma - l_\gamma \frac{\pi}{2}\right)} \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} e^{i\left(k_\beta r_\beta - l_\beta \frac{\pi}{2}\right)} & 0 \\ 0 & e^{i\left(k_\gamma r_\gamma - l_\gamma \frac{\pi}{2}\right)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{\beta\beta} & \sqrt{\frac{k_\gamma}{k_\beta}} U_{\beta\gamma} \\ \sqrt{\frac{k_\beta}{k_\gamma}} U_{\gamma\beta} & U_{\gamma\gamma} \end{pmatrix}$$

Paramétrisation des matrices de collision partielles $(J\pi)$

- Matrice R : E_n = énergies (réelles) des pôles, $\tilde{\gamma}^2_{n,\alpha}$ = largeurs réduites formelles dans la voie α

$$R_{\alpha\beta}(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\gamma}_{n,\alpha}\tilde{\gamma}_{n,\beta}}{E_n - E}$$

- Matrice de collision :

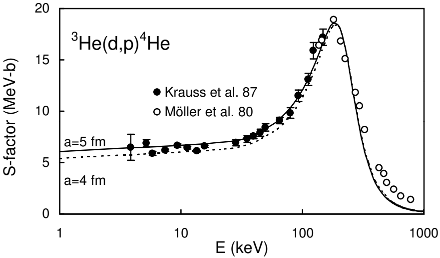
$$\boldsymbol{U}(E) = \boldsymbol{Z}^{-1}(E)\boldsymbol{Z}^*(E)$$

avec

$$Z_{\alpha\beta}(E) = O_\alpha(k_\alpha a)\delta_{\alpha\beta} - a\sqrt{k_\alpha k_\beta} R_{\alpha\beta}(E) O'_\beta(k_\beta a)$$

Exemple : réaction de transfert ^{3}He(d,p)^{4}He

Réaction d'intérêt astrophysique à très basse énergie
$\Rightarrow$ facteur astrophysique $S(E) = \sigma(E)E\exp(2\pi\eta)$



	$a = 4$ fm	$a = 5$ fm
E_1 (keV)	127	158
$\tilde{\gamma}_d^2$ (keV)	170	111
$\tilde{\gamma}_p^2$ (keV)	45	31

[Descouvemont, 2004]

- Deux configurations, $\Delta < 0$
- Résonance $3/2^+$, énergie $E_r = 210$ keV, largeurs partielles $\Gamma_d = 26$ keV, $\Gamma_p = 190$ keV $\Rightarrow \Gamma = 216$ keV
- Approximation à deux voies. . .
  - $l_d = 0$
  - $l_p = 2$
- . . .et à un pôle $\Rightarrow$ sensibilité à a sous la résonance

Résumé

- Problème à deux corps $\Rightarrow$ équation(s) de Schrödinger radiale(s) (une dimension) pour chaque onde partielle
- Matrices de collisions (déphasages) $\Rightarrow$ amplitudes de diffusion $\Rightarrow$ sections efficaces
- Basses énergies
  - quelques ondes partielles suffisent
  - développement en portée effective
- Résonances : phénomène ondulatoire, analogue aux états liés
- Matrice R : méthode très efficace, tant théoriquement qu'expérimentalement, mais quelques précautions nécessaires

ULB